УДК 515.2

Ботвіновська Світлана Іванівна
Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ ПРОСТОРОВОЇ ОБОЛОНКИ З ВИКОРИСТАННЯМ КОНХОІДАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Анотація. *В роботі розглядається використання активного перетворення координат системи на основі конхоідального перетворення у просторі для геометричного моделювання дискретного каркасу поверхні на довільно заданому опорному контурі і за заданими композиційними властивостями. Наведено приклад формування дискретного каркасу поверхні, яка зберігає схожість форми, із заданою поверхнею-прообразом, а саме форму конхоідального циліндру. Подібний підхід можна використовувати у проектування криволінійних конструкцій в архітектурі.*

Ключові слова: геометричне моделювання; архітектурне формоутворення; дискретний каркас; конхоідальне перетворення

Постановка проблеми

Дискретні моделі поверхонь у вигляді простих розтягнутих сітчастих каркасів, які можна описувати системами лінійних рівнянь за СГМ, можуть використовуватись для моделювання поверхонь самих різноманітних форм із наперед заданими крайовими умовами. Ці моделі можуть слугувати аналогами майбутніх просторових архітектурних поверхонь-покриттів для перекриття великих об’ємів з нанесеними на них дискретними сітками, або для різноманітних криволінійних поверхонь у дизайн-проектуванні.

Саме тому, в області дискретної прикладної геометрії і сьогодні залишаються питання розширення можливостей існуючих методів для моделювання сучасних поверхонь із перенесенням на них властивостей широко відомих поверхонь.

Мета статті

Метою статті є розширення можливостей використання СГМ для моделювання дискретних каркасів поверхонь із перенесенням на них властивостей існуючих поверхонь-прообразів. А також, розробка та побудова дискретної моделі поверхні на довільно заданому опорному контурі із використанням активного перетворення координатної системи на основі конхоідального перетворення у просторі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Статико-геометричний підхід до формоутворення точкового каркасу поверхні дозволяє враховувати різноманітні наперед задані геометричні умови, коли не існує можливості записати аналітичне рівняння цієї поверхні [1].

Сучасна архітектура вимагає появи оригінальних оболонок, які будуть мати складні, цікаві та перспективні форми. Для їх формування використовують все нові і нові напрямки та способи геометричного та композиційного моделювання.

В роботах [2, 3] були представлені приклади геометричного моделювання поверхонь із заданими властивостями на довільно заданих опорних контурах. Запропоновані в роботах способи дозволяють переносити властивості поверхонь-прообразів на поверхню, що моделюється. Процес відбувається різними шляхами, одним з яких є використання різноманітних перетворень.

В роботі [2] були проаналізовані властивості притаманні різним найпростішим поверхням та запропоновано спосіб, який розширює можливості використання СГМ. Представлено формоутворення каркасу поверхні із збереженням особливостей форми поверхні-прообразу за рахунок використанням зовнішнього формоутворюючого навантаження, яке вираховується на цій поверхні та прикладається до вузлів поверхні, що моделюється.

В роботі [3] моделюється сітчастий каркас поверхні із збереженням округлості форми за рахунок використання квадратичного перетворення – інверсії в просторі. В роботі [4] розглядається зовсім інший підхід, де автор пропонує нові способи структурного формоутворення замкнених складених дискретних лінійчатих оболонок, які базуються на перетворенні вихідних правильних (Платонових) та зіркоподібних багатогранників. Це дозволить суттєво розширити різноманітність форм криволінійних поверхонь. В роботі [5] розглядається питання узагальнення координатних систем, що дозволяє моделювати біоформи у процесі росту за заданою траєкторією або направляючою поверхнею. Дискретний каркас поверхні будується в полярній системі координат на основі евольвенти кола або за допомогою напрямної поверхні тора, наводяться формули перетворення координат, що дозволяють описувати точкові каркаси біоформи, що моделюються у традиційних координатних системах. Все це розширює можливості сучасних методів моделювання і дозволяє використовувати більш сучасні технології у майбутньому.

Зовнішній вигляд майбутньої споруди – це ознака сучасного будівництва. При конструюванні архітектурних оболонок значне місце архітектор приділяє зовнішньому вигляду ще на етапі ескізного проектування. Багато різних архітектурних форм запозичуються у живої природи. Так на будівлі музею «*Shell Museum*» (музей молюсків у Китаї) запропоновано дуже оригінальний дах. Будівлю виконано за проектом архітекторів *«The Design Institute of Civil Engineering & Architecture of DUT»* (рис. 1).

Рисунок 1 – Будівля музею «Shell» у місті Далянь, Китай
Джерело:http://www.archfacade.ru/2011/03/muzej-mollyuskov-v-kitae.html

Його форма нагадує величезні лусочки що насуваються одна на одну і трохи зміщуються по колу, повторюючи будову панцира гігантського молюска. Кожний наступний елемент знаходить на попередній, але не ховає його повністю залишаючи край на волі. Музей був відкритий у Китаї у 2003 році. Поверхня даху виконана із спеціального матеріалу *QuadroClad* за особливою технологією і є майже ідеально гладкою. Матеріал легкий, дуже міцний та має стільникову структуру, що дозволяє конденсату не скупчуватись, а плавно стікати по криволінійній поверхні.

Ще однією оригінальною ідеєю є проект реконструкції ринку в Барселоні (рис. 2) архітектора Енріко Міралеса (EMBT Arquitectes Associats), представлений на виставці з цікавою назвою «*On-Site: New Architecture і Spain*» *(«Будмайданчик: нова іспанська архітектура»)*, що була розвернута у нью-йоркському *MoMA*.

Рисунок 2 – Реконструкція ринку Санта-Катерини у Барселоні
Джерело: http://delovoy-kvartal.ru/dinamichnaya-ispanskaya-arhitektura/

Поверхня представляє собою різнокольоровий дах-скатертину, та нагадує хвилясту поверхню.

Виклад основного матеріалу дослідження

Аналіз публікацій останніх років, присвячених описаній проблемі показав, що СГМ може стати наочним узагальнюючим методом для розв'язання більшості задач формування дискретних каркасів поверхонь.

Дискретний каркас будь-якої поверхні може бути представлений як такий, формується під впливом рівномірно розподіленого навантаження [1], прикладеного до кожного вузла сітки. Аналітично координати вузлів такої сітки описуються системою лінійних рівнянь

$$u_{i,j,1} + u_{i,j,2} + \cdots + u_{i,j,l} + \cdots + u_{i,j,n-1} + u_{i,j,n_{ij}} - \\ - n_{i,j} u_{i,j} + \overline{kP_{i,j}} = 0, \qquad (1)$$

де u – узагальнене позначення відповідної координати (X,Y,Z); i,j – номер вузла у прийнятій системі нумерації вузлів; n_{ij} – число в'язей, що належить вузлу M_{ij}; l – номер в'язей, що належить вузлу.

Кожну координату в рівнянні (1) можна вважати функцією. Якщо сітку, сформовану за допомогою системи рівнянь (1) піддати деякому перетворенню отримаємо нову дискретну сітку, яка буде мати деякі властивості зазначеного перетворення. У загальному випадку, сітка сформована за допомогою будь-якого перетворення не буде рівноважною, оскільки всі перетворення, за винятком афінних, не зберігають прості відношення трьох точок. Кожне перетворення має свої властивості, які можна використати як композиційні властивості [2] до поверхні, що моделюється.

Формування поверхонь за допомогою активного перетворення координат раніше було використано в роботах А.Т. Петрової, О.В. Кащенко, С.М. Ковальова.

Активне перетворення координат може використовуватись для формування дискретного каркасу поверхні за заданими вихідним спрощеним образом поверхні та заданими крайовими умовами. Спеціальне перетворення слід обирати так, щоб вихідний образ був результатом перетворення площини, що лежить в декартовій системі координат. При цьому, бажано щоб перетворення зберігало однозначну відповідність між точками образу та набором координат. Слід пам'ятати, що активне перетворення ставить у відповідність кожній точці простору іншу точку. Система координат при цьому не змінюється.

У зв'язку з цим розглянемо перетворення координат в просторі на базі конхоідального перетворення, коли кожній точці площини рівня (рис. 3, *а*), буде відповідати точка конхоідального циліндра. А поверхня, що моделюється буде розміщуватись у шарі між двома граничними поверхнями.

В якості однієї граничної поверхні вибираємо поверхню із конхоїд, які лежать в паралельних площинах *XOZ* (рис. 3, *б*), так що полюси кожної конхоїди (точки S_{ij}) розміщуються на прямій (*s*). Ця поверхня є перетворенням площини *z=const*, що знаходиться у декартовій системі координат.

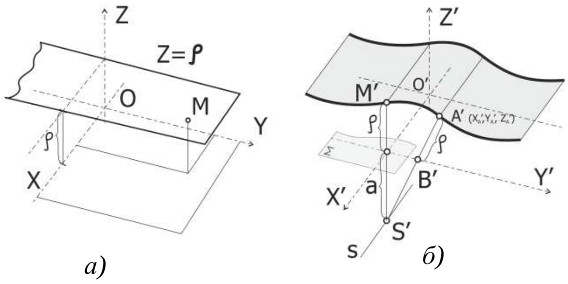

Рисунок 3 – Схема конхоідального перетворення: а) вихідні площини в декартовій системі координат; б)дві граничні поверхні у спеціальній координатній системі – конхоідальний циліндр і площина рівня

Дві площини будуть перетворюватись у дві поверхні із конхоїд. У шарі між ними будуть розміщуватись точки опорного контуру майбутньої дискретної сітки. При зворотному перетворенні цей шар буде перетворюватись у шар між двома площинами (рис. 3, *а*), де буде моделюватись розтягнута сітка дискретного каркасу за лінійними рівняннями СГМ без зовнішнього навантаження.

Для спрощення розрахунків в якості однієї із вихідних площин можна обрати площину рівня, на позначці *z=0*. Точки такої площина після перетворення будуть все рівно залишатись лежати в площині рівня.

Чим меншим буде шар між обмежуючими поверхнями тим ближчими будуть вузли нової поверхні, що моделюється до вузлів обмежуючої поверхні. Тому, задаючи вихідні дані (вузли опорного контуру) необхідно враховувати ступінь наближення вузлів сітки, що моделюється до вузлів обмежуючої поверхні із конхоїд.

Конхоїду прямої лінії обираємо в площині *Z'O'X'*. Оскільки параметр конхоїди ϱ=const, не буде змінюватись і залишатиметься однаковим в усіх площинах (Σ) матимемо поверхню конхоідального циліндру.

Для утворення шару введемо обмеження:

- при побудові конхоїди Нікомеда будемо працювати лише з тією гілкою кривої де координати *Z* будуть додатними, тобто беремо точки лише з однієї сторони від її базису, який суміщаємо з віссю *OX*.

Конхоїда належить до алгебраїчних кривих 4-го порядку, форма якої залежить від параметрів *ϱ* та *a* (рис. 4).

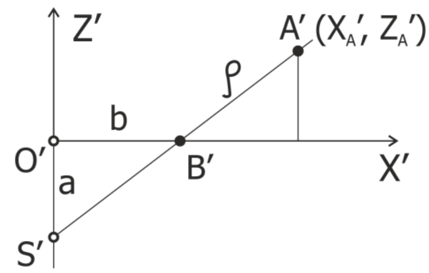

Рисунок 4 – Схема побудови конхоїди Нікомеда

Рівняння конхоїди Нікомеда у прямокутній системі координат (полюс – точка S знаходиться на відстані a від початку системи координат, вісь абсцис направлена в площині променя *SA*, точка *B* – проекція полюсу на основу (базис)) буде мати вигляд:

$$(\varrho^2 - z^2)(z+a)^2 = x^2 z^2$$

або

$$x^2 = \frac{(\varrho^2 - z^2)(z+a)^2}{z^2} \qquad (2)$$

Оскільки, проекціювальні поверхні описуються лише одним рівнянням, і це рівняння їх напрямної, маємо (2) рівняння конхоідального циліндра.

В залежності бід бажаного результату та поставленої геометричної задачі, як правило, використовують різні традиційні та спеціальні координатні системи. Але оскільки в більшості прикладних задач використовують декартову систему координат, необхідно мати відповідні формули перетворення із спеціальної системи у декартову. Формули прямого перетворення будуть мати вигляд:

$$x' = x + \frac{xz}{\sqrt{x^2+a^2}};\quad y' = y;\quad z' = \frac{az}{\sqrt{x^2+a^2}}; \qquad (3)$$

Формули зворотного перетворення виглядатимуть:

$$x = \frac{ax'}{a+z'};\quad y = y';\quad z = \frac{z'\sqrt{(x')^2+(a+z')^2}}{a+z'}; \qquad (4)$$

Алгоритм формування дискретного каркасу можна представити так: вихідні данні (координати вузлів опорного контуру) задаються в системі *Z'O'X'*. За формулами зворотного перетворення (4) переводять у шар між площинами, в декартовій системі координат, одна із яких є перетворенням конхоіди, а в якості обираємо площину рівня на нульовій позначці $Z=0$, оскільки точки опорного контуру належать цій площині.

За СГМ у системі координат *XOZУ* будуємо дискретний каркас поверхні. Після знаходження всіх координат за формулами прямого перетворення (3) отримуємо координати вузлів шуканої поверхні із заданим опорним контуром.

Приклад. Побудуємо дискретний каркас поверхні, що задана на прямокутному плані. В якості вихідного опорного контуру обираємо дві прямі (n, m) , що належать горизонтальній площині *X'O'Y'* (рис. 5), та дві ламані розміщені у площинах *Y'O'Z' (Y=±7)*.

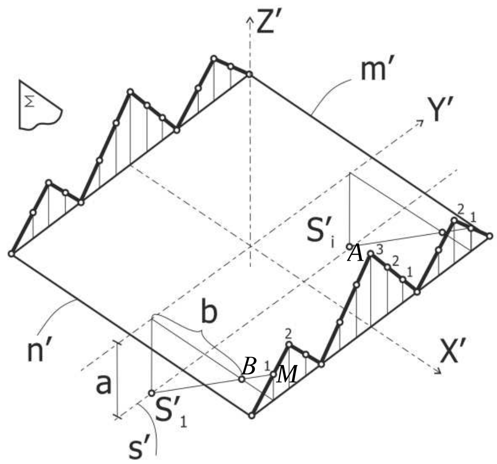

Рисунок 5 – Схема завдання опорного контуру поверхні у системі Z'O'X'Y'

Висота найвищої точки A, $h_a=3.00$. Задано один параметр конхоіди ($a=2$). Величину параметру (ϱ) розраховуємо за формулою:

$$\varrho = \mathrm{AB} = \sqrt{(x'_A - x'_B)^2 + (z'_A)^2}; \qquad (5)$$

На рис. 3, б, точка B горизонтальної площини перетворюється у точку A конхоіди. По аналогії, на рис. 5 всі точки опорного контуру (наприклад, точка М) шляхом зворотного перетворення переходять у точки горизонтальної площини (наприклад, точку В).

Враховуючи задані параметри клотоїди отримаємо формули зворотного перетворення (4) у вигляді:

$$x_B = \frac{2{x_A}'}{2+{z_A}'};$$
$$y_B = y_A; \qquad (6)$$
$$z_B = \frac{{z_A}'\sqrt{({x_A}')^2+(2+{z_A}')^2}}{2+{z_A}'};$$

За формулами (6) визначаємо всі значення координат для всіх точок опорного контуру. На рис. 6 переставлена топологічна схема сітки на прямокутному (квадратному) плані з кількістю клітин 7х7.

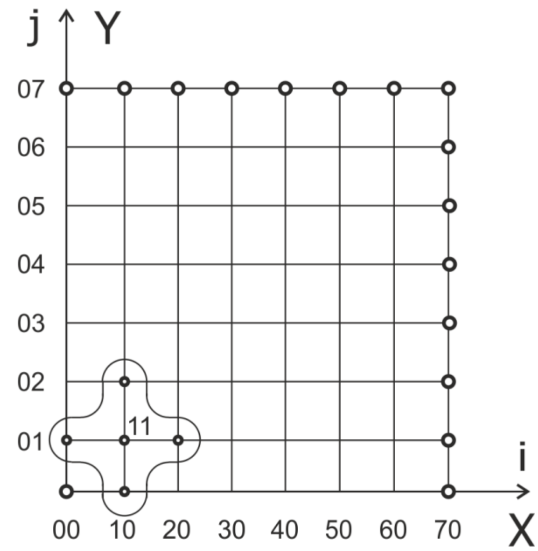

Рисунок 6 – Топологічна схема за СГМ та форма п'ятиточкового розрахункового шаблону

На схемі показані (закріплені) вузли опорного контуру, координати яких наведено в табл. 1 у виділених товстою лінією клітинках. Для визначення координат всіх внутрішніх вузлів було складено та розв'язано систему рівнянь рівноваги СГМ. За формулами прямого перетворення (3) було визначено координати всіх внутрішніх вузлів сітки.

Результати розрахунків занесені в табл. 1 з урахуванням симетрії для ¼ частини сітки.

Таблиця 1 – ***Координати вузлів сітки***

j=7	X Y Z	**0.000 7.000 0.000**	**1.000 7.000 0.000**	**2.000 7.000 0.000**	**3.000 7.000 0.000**	**4.000 7.000 0.000**	**5.000 7.000 0.000**	**6.000 7.000 0.000**	**7.000 7.000 0.000**
j=6	X Y Z	0.000 6.000 0.3304	1.0660 6.000 0.3101	2.0926 6.000 0.2783	3.0914 6.000 0.2661	4.0805 6.000 0.2863	5.0693 6.000 0.3590	6.0579 6.000 0.5403	**7.000 6.000 1.000**
j=5	X Y Z	0.000 5.000 0.6384	1.1132 5.000 0.6050	2.1621 5.000 0.5489	3.1612 5.000 0.5219	4.1393 5.000 0.5460	5.1132 5.000 0.6543	6.0908 5.000 0.9618	**7.000 5.000 2.000**
j=4	X Y Z	0.000 4.000 0.9074	1.1454 4.000 0.8653	2.2132 4.000 0.7883	3.2163 4.000 0.7356	4.1892 4.000 0.7225	5.1499 4.000 0.7477	6.0989 4.000 0.874	**7.000 4.000 1.000**
j=3	X Y Z	0.000 3.000 1.1276	1.1645 3.000 1.0811	2.2463 3.000 0.9905	3.2562 3.000 0.9155	4.2320 3.000 0.8608	5.1961 3.000 0.7830	6.1465 3.000 0.5666	**7.000 3.000 0.000**
j=2	X Y Z	0.000 2.000 1.2916	1.1712 2.000 1.2458	2.2595 2.000 1.1551	3.2715 2.000 1.0827	4.2450 2.000 1.0442	5.2018 2.000 1.0242	6.1382 2.000 0.9980	**7.000 2.000 1.000**
j=1	X Y Z	0.000 1.000 1.3902	1.1702 1.000 1.3496	2.2588 1.000 1.2674	3.2691 1.000 1.2126	4.2379 1.000 1.2175	5.1898 1.000 1.3030	6.1277 1.000 1.5186	**7.000 1.000 2.000**
j=0	X Y Z	0.000 0.000 1.4099	1.1678 0.000 1.3829	2.2562 0.000 1.3077	3.2653 0.000 1.2632	4.2320 0.000 1.2926	5.1839 0.000 1.4416	6.1330 0.000 1.8396	**7.000 0.000 3.000**
		i=0	***i=1***	***i=2***	***i=3***	***i=4***	***i=5***	***i=6***	***i=7***

Змодельовану поверхню представлено на рис. 7. Поверхню побудовано за допомогою графічного редактору *Solid Works*.

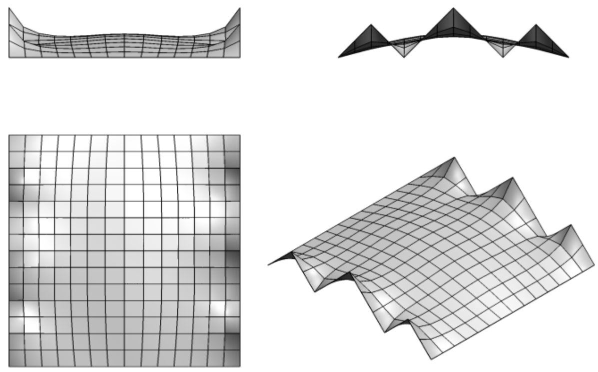

Рисунок 7 – Дискретний каркас змодельованої поверхні із збереженням конхоїдального циліндру

Висновки

Розроблений спосіб формування дискретних каркасів поверхонь за допомогою різноманітних перетворень при наперед заданих крайових умовах та із урахуванням властивостей, які необхідно врахувати при моделюванні поверхні узагальнює можливості використання СГМ для розв’язання різноманітних задач.

В статті показано можливості використання спеціального способу формоутворення дискретних сіток з використанням спеціального перетворення на прикладі конхоїдального перетворення в просторі.

Ще раз підтверджено, що синтез СГМ та використання різноманітних перетворень у просторі (наприклад, активного перетворення координат, квадратичних перетворень, проективних перетворень і т. інш.) дає можливість моделювати дискретні каркаси поверхонь, які за геометричною формою або іншими властивостями будуть наближатись до заданих поверхонь-прообразів.

Список літератури

1. *Ковалев, С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01 / Ковалев Сергей Николаевич. – М.: МАИ, 1986. – 348 с.*
2. *Ковальов, С.Н. Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі / С.Н. Ковальов, С.И. Ботвіновська, А.В. Золотова // Управління розвитком складних систем. – 2016. - № 25. – С. 121-125.*
3. *Ковальов, С.Н. Геометричне моделювання СГМ за допомогою інверсії / С.Н. Ковальов, С.И. Ботвіновська, А.В. Золотова // Сучасні проблеми моделювання. – 2016. - № 5.– С. 47-57.*
4. *Коротич, А.В. Новые архитектурные формы линейчатых квазимногогранников [Электронный ресурс] / А.В. Коротич //Архитектон: известия вузов. – 2015. –№ 2(50).– URL:http://archvuz.ru/2015_2/3.*
5. *Кащенко, А.В Моделирование направления развития биоформы [Текст] / А.В.Кащенко// Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2013. – № 92. – С. 44-51.*

Стаття надійшла до редколегії 18.04.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. К.О. Сазонов, Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Ботвиновская Светлана Ивановна
Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

ФОРМИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНХОИДАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация. *В работе представлен новый способ формирования дискретных каркасов поверхностей с использованием активного преобразования координат. В качестве примера, для геометрического моделирования дискретного каркаса поверхности на произвольно заданном опорном контуре, с сохранением композиционных свойств заданной поверхности-прообраза рассматривается конхоидальное преобразование в пространстве. Представлен алгоритм моделирования дискретного каркаса поверхности, которая приближается по форме к поверхности конхоидального цилиндра. Описанный способ можно использовать в проектировании криволинейных конструкций в архитектуре.*

Ключевые слова: геометрическое моделирование; архитектурное формообразование; дискретный каркас; конхоидальное преобразование

Botvinovska S.
PhD, assoc. prof. of Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics
Kyiv National University of Costruction and Architecture, Kyiv

THE FORMATION OF THE DISCRETE MODEL OF SPATIAL SHELL WITH USING CONCHOIDAL TRANSFORMATION

Abstract. *The new method of forming of discrete frameworks of surfaces is in-process presented with the use of active transformation of coordinates. As an example, the geometrical design of discrete framework of surface on the arbitrarily initial contour. The surface is modeled with preservation of the composition properties if you specify the surface-prototype. Explore the transformation conchoidal in space. The algorithm of design of discrete framework of surface proposed, which is shaped like a conchoidal cylinder. The described method can be used in the design of curved structures in architecture. Again it is shown that the synthesis of static-geometric method and of various transformations (for example, a projective transformation, the quadratic transformation, of active transformation of coordinates) provides opportunities for modeling discrete surfaces based on the specific geometric shape. The proposed method of transferring the shape features of the surface-prototype to a modeled surface with given initial conditions allows the designer or architect to formally receive a curvilinear architectural surfaces.*

Keywords: geometric modeling, architectural shaping, discrete frame, surface properties, the transformation conchoidal, static-geometric method

References

1. *Kovalev, S.N. (1986). The formation of discrete surface models spatial architectural structures / S.N. Kovalev // Extended abstract of Doctor's thesis. Sumy: SumSU [Ukrainian].*
2. *Kovalev, S.N. (2016). Geometric modeling of the surfaces with given properties in design and architecture / S.N. Kovalev, S.I. Botvinovska, A.V.Zolotova // Management of development of complex systems, 25,121-125.*
3. *Kovalev, S.N. (2016). Geometric modeling of static-geometric method surfaces with inversion transformation / S.N. Kovalev, S.I. Botvinovska, A.V. Zolotova // Management of Modern problems of modeling, 5, 47-57.*
6. *Korotich, A.V. (2015). New architectural forms bar quasi polyhedral/ A.V.Korotich [Electronic source]:URL:http://archvuz.ru/2015_2/3. –. № 2(50).*
4. *Kashenko, A.V. (2013). Modeling of the bio-form development direction // The applied geometry and engineering graphics, (92), 44-51.*

Посилання на публікацію

APA *Botvinovska, Svitlana, (2016). The formation of the discrete model of spatial shell with using conchoidal transformation. Management of Development of Complex Systems, 26, 135 – 140.*

ГОСТ *Ботвиновская, С.И. Формирование дискретной модели пространственной оболочки с использованием конхоидального преобразования [Текст] / С.И. Ботвиновская // Управління розвитком складних систем. – 2016. – № 26. – С. 135 – 140.*