DOI: 10.6084/m9.figshare.11969043
УДК 539.3

Баженов Віктор Андрійович
Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки, *orcid.org/0000-0002-5802-9848*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Вабіщевич Максим Олегович
Кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки, *orcid.org/0000-0002-0755-5186*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Солодей Іван Іванович
Доктор технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки, *orcid.org/0000-0001-7638-3085*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕГРАЛІВ, НЕЗАЛЕЖНИХ ВІД КОНТУРУ ІНТЕГРУВАННЯ, В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

Анотація. *Протягом останніх десятиліть J-інтеграл Черепанова – Райса вважається основним енергетичним критерієм тріщиностійкості для розв'язання задач механіки руйнування. Цей параметр успішно застосовується при розгляді пружних задач та в межах деформаційної теорії пластичності для стаціонарних тріщин. На жаль, теоретична основа, на якій базується J-інтеграл не дає змогу поширити його використання для розв'язку задач, що потребують врахування неоднорідності матеріалу, наявності температурних впливів, довільної історії навантаження, масових сил, розвитку тріщин тощо.*

Ключові слова: механіка руйнування;інтеграли, незалежні від контуру інтегрування; J-інтеграл Черепанова – Райса; фізична нелінійність, Т-інтеграл

Вступ

Енергетичний параметр тріщиностійкості J-інтеграл зарекомендував себе як надійний критерій характеристики полів деформацій навколо вершини тріщини та прогнозування її появи і зростання в монотонно навантажених конструкціях, виготовлених із пружнопластичних матеріалів. Можливість обчислення J-інтеграла чисельним методом за напруженнями та переміщеннями по дальньому контуру сприяла його застосуванню в обчислювальних комплексах, що працюють на базі методу скінченних елементів. Водночас незалежність J-інтеграла від контуру інтегрування справедлива тільки в межах деформаційної теорії пластичності, він не може бути явно використаним в у мовах розвантаження після пластичної деформації чи наявності навантажень з довільною історією розвитку. J-інтеграл також не може бути застосованим за наявності температурних градієнтів чи суттєвій неоднорідності матеріалу. Інші параметри зовнішніх впливів, такі як масові сили та навантаження, прикладені до поверхні тріщини, також повинні бути виключені з розрахунку за використанні J-інтеграла.

З метою подолання означених обмежень дослідниками була запропонована значна кількість модифікацій інтегралів, незалежних від контуру інтегрування (далі НКІ). Більшість із запропонованих підходів є незначною модифікацією J-інтеграла Черепанова – Райса, однак окремі параметри сформовані на суттєво відмінних теоретичних основах. Незважаючи на наявність великої кількості публікацій, присвячених означеній проблематиці, говорити про існування універсального енергетичного параметра тріщиностійкості для задач механіки руйнування, навіть в умовах квазістатичного навантаження, не доводиться.

Об'єктом дослідження є найбільш розповсюджені НКІ, які застосовуються в пружно-пластичній механіці руйнування. Розглядаються характерні ознаки кожного з інтегралів, їх взаємозв'язок, відмінності та обмеження у використанні.

Мета статті

Метою роботи є огляд незалежних від контуру інтегрування інтегралів з точки зору їх теоретичного обґрунтування, можливості визначення експериментальним шляхом та простоти обчислення. В статті розглянуті J-інтеграл, інтеграли Вілсона-Ю, Гуртінса, Блекберна, Кішімото, Ейнсворта, Атлурі.

Виклад основного матеріалу

J-інтеграл

Поява J-інтеграла в механіці руйнування пов'язана з роботою Райса [1], однак схожі підходи до визначення характеристик полів в околі вершини тріщини можна знайти в працях Ешелбі [2], Сандерса [3] та Черепанова [4]. Пізніше дослідники розширили застосування J-інтеграла для великих пружних деформацій [5 – 7].

Розглянемо фрагмент тіла з тріщиною, як показано на рисунку. Припустимо, що тріщина пряма і зорієнтована вздовж осі x_1. Також будемо вважати, що масові сили відсутні і поверхня тріщини незавантажена.

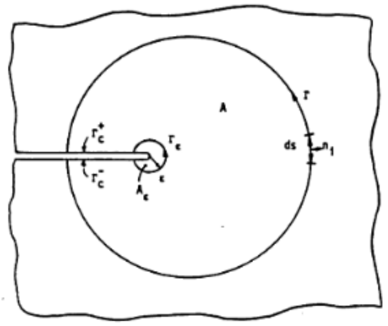

Рисунок – Контури і площі інтегрування

Тоді інтеграл J буде незалежним від контуру інтегрування

$$J = \int_{\Gamma} (n_i W - t_i u_{i,1}) ds, \quad (1)$$

де щільність пружної деформації обчислюється за формулою:

$$W = \int_0^{e_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}. \quad (2)$$

Зважаючи на те, що W є однозначно визначеною функцією напруження, J-інтеграл вважається дійсним для нелінійних пружних матеріалів. Незалежність шляху J легко довести за допомогою рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (3)$$

та теоремою про дивергенцію

$$\int_C n_i f ds = \int_A f_{,i} dA, \quad (4)$$

де f – кусково-неперервна диференційна функція; C – замкнутий контур; A – область, оточена контуром C.

Однорідність матеріалу, принаймні у напрямку x_1, також прийнята задля забезпечення незалежності контуру інтегрування. Завдяки цьому, як показано в працях Смілсера і Гуртіна [8], застосування базового J-інтеграла може бути розширене без змін і для біматеріалів, за умови, що лінія зв’язку пряма і паралельна тріщині.

Для лінійно-пружних матеріалів зв'язок між J-інтегралом та КІН першого типу може бути визначений згідно співвідношення

$$J = \frac{k}{E} K_I^2, \quad (5)$$

де k = 1 – для плоско-напруженого стану; $k = 1 - \nu^2$ – для плоско-деформованого стану.

Вираз (5) широко застосовується для визначення K_I через J-інтеграл, обчислений по дальньому контуру. В межах деформаційної теорії пластичності J-інтеграл може бути застосованим і для пружнопластичних матеріалів.

J-інтеграл, визначений чисельно на базі методу скінченних елементів, що ґрунтується на деформаційний теорії пластичності, загалом забезпечує незалежність від контуру інтегрування, за умови, що ступінь непропорційності зростання навантаження незначна.

Водночас, як було досліджено в роботі Макмікінга [9], J-інтеграл стає залежним від контуру, який охоплює безпосередню вершину тріщини, де навантаження має виражено нелінійний характер зростання.

Одне з обмежень використанняJ-інтеграла полягає в тому, що він не може бути застосований в умовах, коли розвантаження відбувається після пластичної деформації. Це особливо важливо для розв'язку задачі про розповсюдження тріщини, яке як правило, починається під час загального чи локального розвантаження системи. В окремих роботах [10; 11] зазначена проблема вирішувалася шляхом введеня до формули визначення J-інтеграла імпиричних множників. Однак автори не наводять строгого доведення фізичного змісту цих коефіцієнтів.

Однією з переваг використання J-інтеграла, на думку Даулінга та Беглі [13], є можливість експериментального вимірювання цього параметра за формулою

$$J = -\,{}^{dP}\!/_{da}. \quad (8)$$

Це співвідношення Райс наводить в роботі [12], в якій показує, що J-інтеграл можна розглядати як швидкість зменшення потенційної енергії для двох тіл, що відрізняються довжиною тріщини на нескінченно малу величину da. Вираз для потенційної енергії має вигляд:

$$P = \int_V W(\varepsilon_{ij}) dV - \int_{S_t} t_i u_i dA, \quad (9)$$

де V – об'єм тіла; S_t – границя, на якій досліджується рух тріщини.

З огляду на рівняння (8) часто називають "рушійною силою тріщини" або "швидкістю вивільнення енергії".

Інтеграл Вілсона та Ю

Вілсон та Ю [14] модифікували J-інтеграл, щоб врахувати температурнускладову. Їх інтеграл (для зручності надалі J_w) має вигляд

$$J_W = \int_\Gamma (n_i W - t_i u_{i,j}) - \alpha(3\lambda + 2\mu)\times \times \int_A 1/2 (\Theta\varepsilon_{ii})_{,i} - \varepsilon_{ii}\Theta_{,1})dA, \quad (10)$$

$$W = 1/2 \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad (11)$$

де ε_{ij} враховує температурну складову. Компонент напружень σ_{ij} пов'язаний з ε_{ij} виразом:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\sigma_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \alpha(3\lambda + 2\mu)\sigma_{ij}\Theta. \quad (12)$$

Слід зауважити, що модифікація була виконана лише для однорідних, ізотропних, лінійно еластичних матеріалів.

Цікавою особливістю інтеграла Вілсона, яка була помічена в роботі Нгуєна та Джермейна [15; 16], є можливість виразити J_W таким чином:

$$J_W = -\delta\phi / \delta a, \quad (13)$$

де ϕ – загальний термодинамічний потенціал, що містить такі складові, як деформація, температура, довжина тріщини, та інші внутрішні параметри. Рівняння (13) еквівалентне (8), що має важливе значення з точки зору можливості експериментальних досліджень.

Інтеграл Гуртіна

Гуртін [17] довів закон збереження для термопружних полів, що задовольняє умовам рівнянь (3) і (12), а також стаціонарні температурні умови, $\Theta_{,ij} = 0$.

$$\int_S [n_i W - t_k u_{k,i} - \frac{\alpha^2(3\lambda + 2\mu)^2}{2(\lambda + \mu)}\Theta^2 n_i + \frac{\alpha\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}(\Theta\frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i\frac{\partial\Theta}{\partial n})]dA = 0, \quad (14)$$

де S – границя за об'ємом $\frac{\partial}{\partial n} = n_j\frac{\partial}{\partial x_j}$, а W – щільність енергії деформації, обчислена за формулою:

$$W = \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_{kk})^2. \quad (15)$$

Рівняння (14) справедливе для дво- та тривимірних задач. Зокрема, для випадку, коли поверхня тріщини не навантажена, інтеграл Гуртіна матиме вигляд

$$J_G = \int_\Gamma [n_1 W - t_k u_{k,1} - \frac{\alpha^2(3\lambda + 2\mu)^2}{2(\lambda + \mu)}\Theta^2 n_1 + \frac{\varepsilon\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}(\Theta\frac{\partial u_1}{\partial n} - u_1\frac{\partial\Theta}{\partial n}]dS. \quad (15)$$

Завдяки відсутності інтегралів по площі у формулі (15), інтеграл J_G має перевагу над J_W з точки зору можливості його визначення експериментальним шляхом з обчислення інтегрованої величини вздовж границі області. Такий тип обчислень проведено Рідом та Макгенрі [18] для визначення J в зразку з одностороннім бічним надрізом.

J_Θ-інтеграл

J_Θ-інтеграл запропонований Ейнсвортом та співавторами [19] має вигляд:

$$J_\Theta = \int_\Gamma (n_1 W - t_i u_{i,1})dS + \int_A \sigma_{ij}\varepsilon^\Theta_{ij,1}dA, \quad (16)$$

де ε^Θ_{ij} – температурна деформація,

$$W(\varepsilon'_{ij}) = \int^{\varepsilon'_{ij}} \sigma_{ij}d\varepsilon'_{ij}, \quad (17)$$

$$\text{а} \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^\Theta_{ij}. \quad (18)$$

Слід зауважити ε'_{ij} включає пружну та пластичну складові від механічного навантаження. Для пружних деформацій нескладно довести, що J_Θ ідентичний J_W.

J*-інтеграл Блекберна

Блекберн в одній зі своїх праць [20] запропонував J*-інтеграл, поданий у такому вигляді:

$$J^* = \int_{\Gamma_\varepsilon} (\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,1}dx_2 - t_i u_{i,1}dS) \quad (19)$$

або альтернативний запис:

$$J^* = \int_{\Gamma + \Gamma_C} (\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,1}dx_2 - t_i u_{i,1}dS) + \int_A (\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij,1} - \frac{3}{2}\sigma_{ij,1}u_{i,j})dA. \quad (20)$$

Можна помітити, що у випадку пружних деформацій другий доданок у виразі (20) дорівнюватиме нулю і J* стає ідентичним до J.A при розгляді задач термопружності параметр J* еквівалентний J_G, J_W, J_Θ, обчислених по прилеглому до вершини тріщини контуру інтегрування.

Для матеріалів, що зміцнюються за ступеневим законом, пряма заміна HRR-поля забезпечує виконання рівності:

$$J^* = g(n)J, \quad (21)$$

де n – коефіцієнт зміцнення, a g(n) може бути обчислене, як тільки відоме кутове відхилення змінних поля.

Основною відмінністю J* від інших інтегралів незалежних від контуру інтегрування є те, що функція щільності енергії деформування відсутня в записі. Натомість було використано явне співвідношення $\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij,1}$. Такий підхід мав розширити сферу застосування інтеграла , але робив фізичний зміст запису доволі сумнівним. Отже, фізичний зміст J* в режимі пластичних деформацій невідомий і буде дуже складно точно описати його.

Разом з тим Блекберн зі співавторами [21] навів результати визначення J* для зразка, що зазнає навантаження, розвантаження і температурного впливу.

$\hat{J}$ – інтеграл Кішімото

$\hat{J}$-інтеграл, запропонований Кішімото та співавторами в роботі [22], має вигляд:

$$\hat{J} = -\int_{\Gamma_{end}} t_i u_{i,1} dS, \quad (22)$$

де Γ_{end} – контур навколо так званої "зони процесу руйнування", в якій континуальна механіка неефективна. Щоб довести рівняння (22) використані рівняння рівноваги та теорему дивергенції. Також було прийнято, що $\frac{\partial u}{\partial a} = 0$ на контурі Γ_{end}. Із цього припущення випливає, що $\hat{J}$ представляє швидкість роботи, виконаної на області процесу руйнування оточуючим тріщину середовищем. Після цього вони перетворюють вираз (22) у наступне, з припущення, що контур Γ_{end}. зменшується та зникає:

$$\hat{J} = -\int_{\Gamma+\Gamma_C} t_i u_{i,1} dS + \int_A \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1} dA. \quad (23)$$

Після цього припустивши, що

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} W^e dS = 0, \quad (24)$$

отримують:

$$\hat{J} = -\int_{\Gamma+\Gamma_C} (n_1 W^e - t_i u_{i,1}) dS + \int_A \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij,1} dA, \quad (25)$$

де

$$\varepsilon^*_{ij,1} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^e_{ij} = \varepsilon^P_{ij} + \varepsilon^\Theta_{ij} \quad (26)$$

і

$$W^e = \int_0^{t^e_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon^e_{ij}. \quad (27)$$

Для лінійно-пружних задач умова рівняння (24) задовольняється тільки при використанні для аналізу несингулярного поля в околі вершини тріщини. При сингулярності поля вираз (25) стає тотожним рівнянню обчислення звичайного J-інтеграла.

$\hat{J}$ - інтеграл, поданий згідно формули (23), може бути використаний для пружно-пластичних матеріалів під дією навантаження та розвантаження. Відповідні висновки зроблені Аокі [23] за результаамми випробування зразка під впливом зовнішнього навантаження і розвантаження.

Обчислення інтеграла $\hat{J}$ по площі аналогічне обчисленню J*-інтегралу. Експериментальне визначенням виглядає таким же складним, як і для J*.

ΔT-інтеграл Атлурі

Атлурі [24] запропонував незалежний від контуру інтегрування поданий у диференційній формі з урахуванням кінцевого напруження, масових сил, сил інерції, та навантажень, прикладених до поверхні тріщини. Температурний градієнт та неоднорідність матеріалу у виразі не присутні. Варіант ΔT-інтегралу для випадку малих деформацій має такий вигляд:

$$\Delta T = \int_{\Gamma+\Gamma_C} [n_1 \Delta W - n_j(\sigma_{jk} + \Delta\sigma_{jk})\Delta u_{k,1}) dS] -$$
$$-\int_A \sigma_{jk,1} \Delta u_{j,k} dA =$$
$$= R + \int_{\Gamma_\varepsilon} [n_1 \Delta W - n_j(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})\Delta u_{i,1}) dS,$$

(28)

де

$$\Delta W = (\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij})\Delta u_{i,1} \quad (29)$$

і R – це внесок розривів в реакцію матеріалу вздовж границі навантаження/розвантаження. Приріст напруження $\Delta\sigma_{ij}$ пов'язаний з приростом деформацій за допомогою рівняння Прандтля – Рейса.

$$\Delta\sigma_{ij} = 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk} - \\ -\frac{12\alpha\mu^2\Delta\varepsilon_{kl}\sigma'_{kl}\sigma'_{ij}}{\sigma'_{mn}\sigma'_{mn}(6\nu + 2\partial F/\partial W^P)}, \quad (30)$$

де

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}; \quad (31)$$

$$F = \frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} - F_0(W^P) = 0; \quad (32)$$

$$W^P = \int^{\varepsilon^P_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon^P_{ij}. \quad (33)$$

Атлурі, Нішіока та Накагакі [25] на основі ΔT-інтеграла розробили дві його модифікації: ΔT_P та ΔT^*_P. Внесок границі пружно-пластичності виражено через змінні полів. Нижче наведені формули ΔT_P та ΔT^*_P.

$$\Delta T^*_P = \int_{\Gamma_\varepsilon} [n_1 \Delta W - (t_i + \Delta t_i)\Delta u_{i,1} - \Delta t_i u_{i,1}] dS =$$
$$= \int_{\Gamma+\Gamma_C} [n_1 \Delta W - (t_i + \Delta t_i)\Delta u_{i,1} - \Delta t_i u_{i,1}] dS +$$
$$+\int_A [\Delta\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij,1} + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{ij,1}) - \Delta\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij,1} + \frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij,1}] dA = \quad (34)$$
$$= \int_{\Gamma+\Gamma_C} [n_1 \Delta W - (t_i + \Delta t_i)\Delta u_{i,1} -$$
$$-\Delta t_i u_{i,1}] dS + \int_A [\Delta\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij,1} + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{ij,1}) -$$
$$-\Delta\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij,1} + \frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij,1}] dA;$$

$$\Delta T_P = \int_S [n_1 \Delta W - (t_i + \Delta t_i)\Delta u_{i,1} - \Delta t_i u_{i,1}] dS =$$
$$= \int_{\Gamma+\Gamma_C} [n_1 \Delta W - (t_i + \Delta t_i)\Delta u_{i,1} - \quad (35)$$
$$-\Delta t_i u_{i,1}] dS + \int_{A_S - A_\Gamma} [\Delta\sigma_{ij,1} + \frac{1}{2}\Delta\sigma_{ij,1})\Delta\varepsilon_{ij} -$$
$$-(\Delta\varepsilon_{ij,1} + \frac{1}{2}\Delta\varepsilon_{ij,1})\Delta\sigma_{ij,1}] dA.$$

В ΔT_P-інтегралі S – зовнішній контур, що охоплює поверхню тріщини; $A_Г$ – площа обмежена контуром Г, A_S – повна площа. Інтеграли по площі в крайніх правих доданках рівнянь ΔT_P^*:та ΔT_P скорочуються, якщо навантаження змінюється пропорційно. Таким чином, оскільки застосована деформаційна теорія пластичності, справедливий вираз

$$\Delta T_P^* = \Delta T_P = \Delta J, \qquad (36)$$

де $\Delta J = \int_{\Gamma_\varepsilon}[n_1 \Delta W - (t_i + \Delta t_i)\Delta u_{i,1} - \Delta t_i u_{i,1}]dS$ (37)

визначається як приріст J-інтеграла через приріст зовнішнього навантаження за часовий проміжок від τ до $\Delta\tau$. В одній із робіт [27] Накагакі навів результати чисельних досліджень компактного зразка під дією циклічного навантаження (завантаження, розвантаження та повторне навантаження), щоб показати незалежність ΔT_P та ΔT_P^*. від контуру інтегрування. Він також обчислив ΔJ в околі вершини тріщини з використанням (37) і продемонстрував, що цей параметр перестає бути незалежним від контуру інтегрування після того, як зразок розвантажено.

Відмінна риса ΔT_P та ΔT_P^*- інтегралів є та, що вони базуються на пластичній теорії течії. Це дає змогу використовувати ці параметри навіть за наявності суттєво непропорційного навантаження і пружного розвантаження, що викликає появу пластичних деформацій. Неоднорідність матеріалу теж враховується при обчисленні параметрів ΔT_P та ΔT_P^* згідно виразів (34), (35).

Висновки

За результатами огляду основних властивостей енергетичних параметрів тріщиностійкості для пружно-пластичних задач механіки руйнування, що представлені інтегралами, незалежними від контуру інтегрування, можна зробити такі висновки:

1. ІнтегралиJта J_Θ можуть бути використані тільки при монотонному навантаженні без суттєвої непропорційності. Для циклічних навантажень використання цих параметрів потребує введення до базових формул імпиричних множників, без строгого доведення фізичного змісту цих коефіцієнтів.

2. Інтеграли J_G, J_Wможуть бути використані тільки для задач термопружності з однорідними властивостями матеріалу. Ці інтеграли можуть бути корисними для прогнозування зростання тріщини при достатньо малому полі градієнтів температур в області локальних пластичних деформацій.

3. Такі незалежні від контуру інтегрування параметри, як J*, $\hat{J}$, ΔT_P та ΔT_P^*теоретично забезпечують можливість розв'язання більш загальних пружно-пластичних задач, включаючи непропорційне навантаження, розвантаження, градієнти температури та неоднорідності матеріалів. Це очевидно є вагомою перевагою при застосуванні цих НКІ для аналізу зростання тріщин при циклічному та термомеханічному навантаженні.

4. Незважаючи на значну кількість публікацій та досліджень, особливості застосування вище – зазначених інтегралів в задачах динаміки руйнування, у т.ч. і за умов динамічного зростання тріщини, майже не розкриті і потребують більш детального чисельного дослідження.

Список літератури

1. *Rice, J.R. A Path-Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Journal of Applied Mechanics, Vol. 35, 1968, pp 379-386.*

2. *Eshelby, J.D. The Continuum Theory of Lattice Defects // Solid State Physics, Vol. III, Academic Press, New York, 1956, pp 79-144.*

3. *Sanders, J.L., Jr. On the Griffith-Irwin Fracture Theory // Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, 1960, pp 352-353.*

4. *Cherepanov, G.P. Crack Propagation in Continuous Media // PMM, Vol. 31, No. 3, 1967, pp 476-488.*

5. *Knowles, J.K. On A Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics / Sternberg, E. // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 44, 1972, pp 187-211.*

6. *Green, A.E. On Some General Formulae in Finite Elastostatics // Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 50, 1973, pp 73-80.*

7. *Chen, F.H.K. Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type / Shield, R.T. // Journal of Applied Mathematics and Physics, Vol. 28, 1977, pp 1-22.*

8. *Smelser, R.E. 0n the J-Integral for Bi-Material Bodies / Gurtin, M.E.// International Journal of Fracture, Vol. 13, 1977, pp 382-284.*

9. *McMeeking, R.M. Finite Deformation Analysis of Crack-Tip Opening in Elastic-Plastic Materials and Implications for Fracture // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 25, 1977, pp 357-381.*

10. *Dowling, N.E. Crack Growth During Low Cycle Fatigue of Smooth Axial Specimens, // ASTM STP 637, 1977, 97-121.*

11. *Kaisand, L.R. Relationships Between Low-Cycle Fatigue and Fatigue Crack Growth Rate Properties / Mowbray, D.F. // Journal of Testing and Evaluation, Vol. 7, No. 5, 1979, pp 270-280.*

12. Rice, J.R. Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture // Fracture, Vol. 2, Ed. H. Liebowitz, Academic Press, 1971, pp 191-311.

13. Dowling, N.E. A Fatigue Crack Growth During Gross Plasticity and the J-Integral / Begley, J.A.// Mechanics of Crack Growth, ASTM STP 590, 1976, pp 82-103.

14. Wilson, W.K. The Use of the J-Integral in Thermal Stress Crack Problems / Yu, I.W. // International Journal of Fracture, Vol. 15, 1979, pp 377-387.

15. Nguyen, Q.S. A Thermodynamic Description of the Running Crack Problem // Proc. of IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, North-Holland Publishing Company, 1981, pp 315-330.

16. Germain, P. Continuum Thermodynamics / Nguyen, Q.S., Suquet, P. // Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983, PP 1010-1020.

17. Gurtin, M.E. On a Path-Independent Integral for Thermoelasticity // International Journal of Fracture, Vol. 15, 1979, pp R169 – R170.

18. Read, D.T. Strain Dependence of the J-Contour Integral in Tensile Panels / McHenry, H.I. // Proc. of the 5th International Conference on Fracture, Cannes, France, 1981, pp 1715-1722.

19. Ainsworth, R.A. Fracture Behavior in the Presence of Thermal Strains / Neale, B.K., Price, R.H. // Proceedings of Institute of Mechanical Engineers' Conference on Tolerance of Flaws in Pressurized Components, London, 1978, pp 171-178.

20. Blackburn, W.S. Path-Independent Integrals to Predict Onset of Crack Instability In An Elastic Material // International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 8, 1972, pp 343-346.

21. Blackburn, W.S. An Integral Associated with the State of a Crack Tip in a Non-Elastic Material / Jackson, A.D. // International Journal of Fracture, Vol. 13, 1977, pp 183-200.

22. Kishimoto, K. 0n the Path-Independent Integral-J / Aoki, S., Sakata, M. // Engineering Fracture Mechanics, Vol. 13, 1980, pp 841-850.

23. Aoki, S. Elastic-Plastic Analysis of Crack in Thermally-Loaded Structures / Kishimoto, K., Sakata, M. // Engineering Fracture Mechanics, Vol. 16, 1982, pp 405-413.

24. Atluri, S.N. Path-Independent Integrals in Finite Elasticity and Inelasticity, with Body Forces, Inertia, and Arbitrary Crack – Face Conditions // Engineering Fracture Mechanics, Vol. 16, 1982, pp 341-364.

25. Atluri, S.N. Incremental Path-Indepen dent Integrals in Inelastic and Dynamic Fracture Mechanics / Nishioka, T., Nakagaki, M. // Georgia Institute of Technology Report GIT-CACM-SNA-83-27, May 1983

26. Nakagaki, M. On the Path Independent Integral, AT , in Elastic—Plastic Fracture Mechanics / Atluri, S.N., Nishioka, T. // SECTAM XII Conference, Pine Mountain, Georgia, May 1984.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2019

Баженов Виктор Андреевич
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики, *orcid.org/0000-0002-5802-9848*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Вабищевич Максим Олегович
Кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, *orcid.org/0000-0002-0755-5186*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Солодей Иван Иванович
Доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры строительной механики,
orcid.org/0000-0001-7638-3085
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ, НЕЗАВИСИМЫХ ОТ КОНТУРА ИНТЕГРИРОВАНИЯ, В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Аннотация. *В течение последних десятилетий J-интеграл Черепанова – Райса считается основным энергетическим критерием трещиностойкости при решении задач механики разрушения. Этот параметр успешно применяется при рассмотрении упругих задач и в пределах деформационной теории пластичности для стационарных трещин. К сожалению, теоретическая основа, на которой базируется J-интеграл не позволяет распространить его использование для решения задач, требующих учета неоднородности материала, наличия температурных воздействий, произвольной истории нагрузки, массовых сил, развития трещин и т. п.*

Ключевые слова: механика разрушения; интегралы, независящие от контура интегрирования; J-интеграл Черепанова – Райса; физическая нелинейность; T-интеграл

Bazhenov Viktor
DSc (Eng.), Professor, Head of Department of Building Mechanics, orcid.org/0000-0002-5802-9848
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Vabischevich Maksim
PhD (Eng.), Assoc. Prof. of the Department of Building Mechanics, orcid.org/0000-0002-0755-5186,
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
SolodeiIvan
DSc (Eng.), Senior Researcher, Professor of the Department of Building Mechanics, orcid.org/0000-0001-7638-3085
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

FEATURES OF THE USE OF PATH-INDEPENDENT INTEGRALS IN THE PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS

Abstract. *In recent decades, the Cherepanov-Rice J-integral has been considered to be the main energy criterion for fracture toughness in solving the problems of fracture mechanics. This parameter is successfully used in the consideration of elastic problems and within the framework of deformation theory of plasticity for stationary cracks. Unfortunately, the theoretical basis on which the J-integral is based does not allow it to be extended to solve problems requiring material inhomogeneity, the presence of temperature influences, an arbitrary load history, mass forces, crack development, and the like. The purpose of the paper is to review other integrals independent of the contour of integration, from the point of view of their theoretical justification, the possibility of experimentally determined and the ease of calculation. The article considers the J-integral, integrals of Wilson-Yu, Gurtins, Blackburn, Kishimoto, Ainsworth, Atluri.*

Keywords: fracture mechanics; path-independent integrals; J-Cherepanov-Rice integral; physical nonlinearity; T-integral

References

1. Rice, J.R. (1968). A Path-Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. Journal of Applied Mechanics, 35, 379-386.
2. Eshelby, J.D. (1956). The Continuum Theory of Lattice Defects. Solid State Physics, III, 79-144.
3. Sanders, J.L., Jr. (1960). On the Griffith-Irwin Fracture Theory. Journal of Applied Mechanics, 27, 352-353.
4. Cherepanov, G.P. (1967). Crack Propagation in Continuous Media. PMM, 31, 3, 476-488.
5. Knowles, J.K. & Sternberg, E. (1972). On A Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 44, 187-211.
6. Green, A.E. (1973). On Some General Formulae in Finite Elastostatics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 50, 73-80.
7. Chen, F.H.K. & Shield, R.T. (1977). Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type. Journal of Applied Mathematics and Physics, 28, 1-22.
8. Smelser, R.E. & Gurtin, M.E. (1977). 0n the J—Integral for Bi-Material Bodies. International Journal of Fracture, 13, 382-284.
9. McMeeking, R.M. (1977). Finite Deformation Analysis of Crack-Tip Opening in Elastic-Plastic Materials and Implications for Fracture. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 25, 357-381.
10. Dowling, N.E. (1977). Crack Growth During Low Cycle Fatigue of Smooth Axial Specimens. ASTM STP, 637, 97-121.
11. Kaisand, L.R. & Mowbray, D.F. (1979). Relationships Between Low-Cycle Fatigue and Fatigue Crack Growth Rate Properties. Journal of Testing and Evaluation, 7, 5, 270-280.
12. Rice, J.R. (1971). Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture. Fracture, 2, 191-311.
13. Dowling, N.E. & Begley, J.A. (1976). A Fatigue Crack Growth During Gross Plasticity and the J-Integral. Mechanics of Crack Growth. ASTM STP, 590, 82-103.
14. Wilson, W.K. & Yu, I.W. (1979). The Use of the J-Integral in Thermal Stress Crack Problems. International Journal of Fracture, 15, 377-387.
15. Nguyen, Q.S. (1981). A Thermodynamic Description of the Running Crack Problem. Proc. of IUTAM Symposium on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, North-Holland Publishing Company, pp 315-330.
16. Germain, P., Nguyen, Q.S., Suquet, P. (1983). Continuum Thermodynamics. Journal of Applied Mechanics, 50, 1010-1020.
17. Gurtin, M.E. (1979). On a Path-Independent Integral for Thermoelasticity. International Journal of Fracture, 15, R169—R170.
18. Read, D.T. & McHenry, H.I. (1981). Strain Dependence of the J-Contour Integral in Tensile Panels. Proc. of the 5th International Conference on Fracture, Cannes, France, pp 1715-1722.
19. Ainsworth, R.A., Neale, B.K., Price, R.H. (1978). Fracture Behavior in the Presence of Thermal Strains. Proceedings of Institute of Mechanical Engineers' Conference on Tolerance of Flaws in Pressurized Components, London, pp 171-178.

20. Blackburn, W.S. (1972). Path-Independent Integrals to Predict Onset of Crack Instability In An Elastic Material. International Journal of Fracture Mechanics, 8, 343-346.

21. Blackburn, W.S. & Jackson, A.D. (1977). An Integral Associated with the State of a Crack Tip in a Non-Elastic Material. International Journal of Fracture, 13, 183-200.

22. Kishimoto, K., Aoki, S., Sakata, M. (1980). 0n the Path-Independent Integral-J. Engineering Fracture Mechanics, 13, 841-850.

23. Aoki, S., Kishimoto, K., Sakata, M. (1982). Elastic-Plastic Analysis of Crack in Thermally-Loaded Structures. Engineering Fracture Mechanics, 16, 405-413.

24. Atluri, S.N. (1982). Path-Independent Integrals in Finite Elasticity and Inelasticity, with Body Forces, Inertia, and Arbitrary Crack—Face Conditions. Engineering Fracture Mechanics, 16, 341-364.

25. Atluri, S.N., Nishioka, T., Nakagaki, M. (1983). Incremental Path-Indepen dent Integrals in Inelastic and Dynamic Fracture Mechanics. Georgia Institute of Technology Report GIT-CACM-SNA-83-27, May 1983

26. *Nakagaki, M., Atluri, S.N., Nishioka, T. (1984). On the Path Independent Integral, AT, in Elastic—Plastic Fracture Mechanics. SECTAM XII Conference, Pine Mountain, Georgia, May 1984.*

Посилання на публікацію

APA *Bazhenov Viktor, Vabischevich Maksim, & Solodei Ivan (2019).Features of the use of path-independent integrals in the problems of fracture mechanics. Management of Development of Complex Systems, 40, 94 – 101; dx.doi.org\10.6084/m9.figshare.11969043.*

ДСТУ *Баженов В.А. Особливості використання інтегралів, незалежних від контуру інтегрування, в задачах механіки руйнування [Текст] / В.А. Баженов, М.О. Вабіщевич, І.І. Солодей // Управління розвитком складних систем. – 2019. – № 40. – С. 94 – 101; dx.doi.org\10.6084/m9.figshare.11969043.*