

Лізунов Петро Петрович

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри основ інформатики, orcid.org/0000-0003-2924-3025
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Недін Валентин Олегович

Кандидат технічних наук, доцент кафедри основ інформатики, orcid.org/0000-0003-3138-2892
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФОРМ ВИГИНУ ПРУЖНИХ СТЕРЖНІВ ЗНАЧНОЇ ДОВЖИНИ

***Анотація.** Представлено методику чисельного диференціювання форм вигину стержнів значної довжини за допомогою поліноміальних сплайн-функцій, яка разом із використанням методу інтегрування за часом використовується для розв'язання задач динаміки коливального руху стержнів з урахуванням геометричної нелінійності та інших параметрів. Використовуючи описану методику апроксимації з подальшим чисельним диференціюванням, показано залежності похідних від довільної форми вигину стержня довжиною 100 м. Для підтвердження достовірності розробленої методики наведено результати чисельного диференціювання форм вигину стержнів, описаних заданими функціями, і здійснено порівняння чисельних результатів, отриманих з використанням запропонованої методики, з результатами аналітичного диференціювання заданих функцій. Побудовано залежності значень похідних по x від довжини стержня, а також наведено чисельні значення результатів диференціювання. Зроблено висновок, що запропонована методика чисельного диференціювання форм вигину стержнів дає змогу здійснювати дослідження динаміки руху стержнів, надає практично точний результат диференціювання, забезпечує неперервність та гладкість функцій всіх чотирьох похідних від форми вигину і може застосовуватись при дослідженні динаміки коливального руху стержнів значної довжини. Реалізація методики здійснена у комп'ютерній програмі з графічним інтерфейсом, яка дає змогу в реальному часі спостерігати за розвитком процесу коливального руху змодельованої системи шляхом обчислення і побудови у вікні програми поточних форм вигину стержнів при коливанні, а також здійснювати аналіз напружено-деформованого стану системи.*

Ключові слова: апроксимація; чисельне диференціювання; форми вигину; сплайн-функції; геометрична нелінійність

Вступ

При дослідженні динаміки пружних стержневих систем, що здійснюють коливальний рух, який виникає внаслідок дії різноманітних зовнішніх та інерційних періодичних навантажень [2; 7; 8], актуальним питанням є вивчення їхніх форм вигину, які можуть змінюватись у часі, особливо в задачах, які пов'язані зі стержнями значної довжини [4; 5], оскільки вигин таких стержнів при коливанні може набувати різних і непередбачуваних форм.

Задачі динаміки пружних стержневих систем доцільно розв'язувати моделюванням коливального руху циклічним розв'язком системи рівнянь для кожної точки механічної системи з метою пошуку нових координат положення цих точок в кожний наступний момент часу $t+\Delta t$ [10]. При цьому саме розв'язання рівнянь з метою пошуку наступної форми вигину доцільно будувати на використанні

сплайн-функцій [6], кожна з яких відповідає за певну точку пружної лінії стержня та описує положення сусідніх.

Мета статті

Мета – представити методику чисельного диференціювання форм вигину стержнів, що описують вигин стержнів значної довжини, за допомогою поліноміальних сплайн-функцій, а також продемонструвати результати її застосування при чисельному диференціюванні форми вигину стержня, що описана заданою функцією в порівнянні із результатами аналітичного диференціювання цих функцій.

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі

При коливальному русі стержнів значної довжини, а також при дії зовнішніх періодичних

навантажень можливі різноманітні форми вигину, які змінюються у часі [9]. У таких випадках, при дослідженні динаміки коливального руху, доцільним є апроксимація у кожний момент часу t лінії поточної форми вигину з пошуком функцій, які найбільш точно її описують. Одним із таких підходів є апроксимація поліноміальною функцією, яка має вигляд [1]:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k, \quad (1)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ – невідомі коефіцієнти.

Для визначення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ виразу (1), в загальному випадку, необхідно, використовуючи значення координат $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ для точок 1, 2, 3, ..., n (рис. 1), розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^n x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n x_i^0 y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^n x_i^1 y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^k + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} + \dots + a_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \end{cases} \quad (2)$$

при умові, що $k < n$.

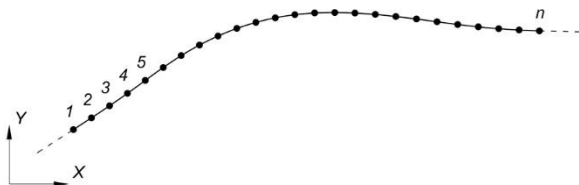


Рисунок 1 – Апроксимація форми вигину

Після розв'язання системи (2) знайдена функція (1), що описує форму вигину, диференціюється певну кількість разів, після чого отримані похідні використовуються у розв'язанні рівнянь коливального руху. Однак цим можна обмежитись у випадках зі стержнями малої довжини, для яких однієї поліноміальної функції 6-го порядку може бути достатньо для описання форми вигину.

Для стержнів значної довжини, наприклад, якими моделюються буринні колони [5], для найбільш точного описання форми їхнього вигину при коливаннях цього недостатньо, оскільки значення коефіцієнтів отриманої функції можуть давати значну похибку [3], що є неприпустимим. У таких випадках доцільно розглядати лінію вигину як сплайн, розбитий на певну кількість сплайн-функцій [1; 6].

У загальному уявленні кожна сплайн-функція відповідає за певну ділянку, а неперервність та гладкість сплайну забезпечується умовою рівності значень другої похідної сусідніх сплайнів у точках перетину сплайн-функцій. При цьому третя та

четверта похідна може зазнавати розривів у точках з'єднання сплайн-функцій [1], що не є припустимим для розв'язку рівнянь коливального руху. Сплайн має бути таким, щоб функція його четвертої похідної була неперервною та гладкою лінією протягом всієї довжини стержня.

Якщо розглянути сплайн в тому представленні, коли кожній точці вигнутої лінії відповідає власна функція, для якої існує четверта похідна, та її гілки є дотичними в сусідніх точках, як мінімум двох з одного боку та двох з іншого від поточної, то в такій реалізації функція четвертої похідної сплайну буде неперервною та гладкою лінією, що є необхідною умовою для розв'язання рівнянь коливального руху стержнів [9], оскільки функції всіх похідних, що входять до складу рівнянь, мають бути неперервними і гладкими лініями.

Кожна така функція шукається апроксимацією значень у точках ділянки, що розглядається. Знайдені функції диференціюються, а отримані похідні використовуються в розв'язанні системи диференціальних рівнянь для кожної точки стержня окремо з метою обчислення наступної форми вигину в момент часу $t + \Delta t$.

Методика дослідження

Розглянемо поточну форму вигину стержня довжиною l у деякий момент часу t . Для кожної точки n стержня (рис. 2) по 5-ти значеннях $u_{n-6}, u_{n-3}, u_n, u_{n+3}, u_{n+6}$ для $x_{n-6}, x_{n-3}, x_n, x_{n+3}, x_{n+6}$ в точках $n-6, n-3, n, n+3, n+6$ здійснимо апроксимацію лінії вигину поліноміальними функціями 4-го порядку

$$f_n(x) = a_{n0} + a_{n1}x + a_{n2}x^2 + a_{n3}x^3 + a_{n4}x^4$$

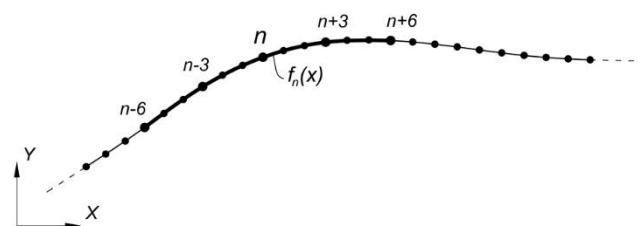


Рисунок 2 – Апроксимація форми вигину для точки n у функцію $f_n(x)$

Для визначення коефіцієнтів $a_{n0}, a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}$ кожної функції необхідно розв'язати систему з 5-ти лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{n0} + a_{n1}x_{n-6}^1 + a_{n2}x_{n-6}^2 + a_{n3}x_{n-6}^3 + a_{n4}x_{n-6}^4 = y_{n-6} \\ a_{n0} + a_{n1}x_{n-3}^1 + a_{n2}x_{n-3}^2 + a_{n3}x_{n-3}^3 + a_{n4}x_{n-3}^4 = y_{n-3} \\ a_{n0} + a_{n1}x_n^1 + a_{n2}x_n^2 + a_{n3}x_n^3 + a_{n4}x_n^4 = y_n \\ a_{n0} + a_{n1}x_{n+3}^1 + a_{n2}x_{n+3}^2 + a_{n3}x_{n+3}^3 + a_{n4}x_{n+3}^4 = y_{n+3} \\ a_{n0} + a_{n1}x_{n+6}^1 + a_{n2}x_{n+6}^2 + a_{n3}x_{n+6}^3 + a_{n4}x_{n+6}^4 = y_{n+6} \end{cases} \quad (3)$$

Отже, поточна форма вигину після апроксимації буде описана масивом з n функцій $f_n(x)$, кожна з яких відповідає певній точці пружної лінії стержня.

Оскільки для розв'язання рівнянь коливального руху необхідно мати перші чотири похідні, для кожної точки необхідно та достатньо мати поліноміальну функцію 4-го порядку. Для її визначення необхідно та достатньо мати значення в 5-ти точках (рис. 2).

Реалізація методики та результати

Використовуючи описану вище методику апроксимації з подальшим диференціюванням, для стержня завдовжки $l=100$ м залежності значень похідних по x форми вигину стержня від довжини будуть мати вигляд, зображений на рис. 3.

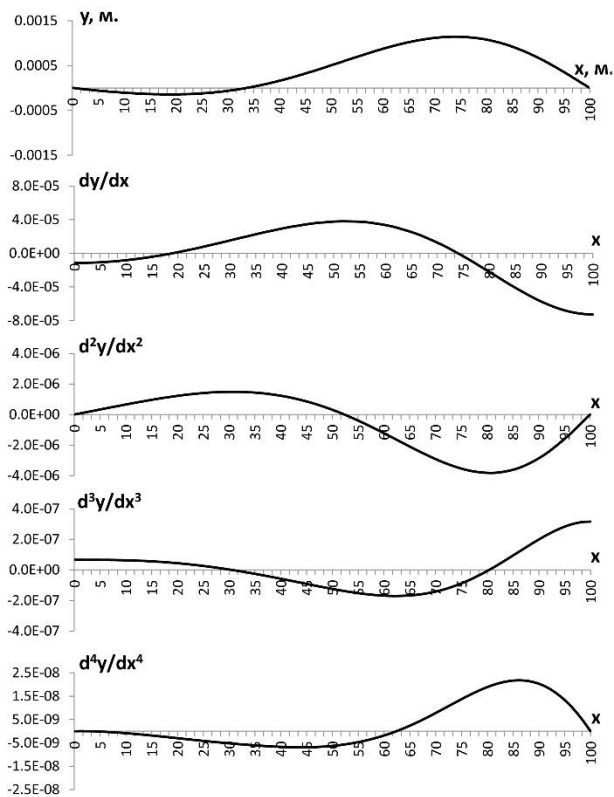


Рисунок 3 – Форма вигину стержня завдовжки $l = 100$ м та її перші чотири похідні

Для підтвердження достовірності такого підходу наведемо результати диференціювання форм вигину стержнів, описаних функціями $y = \sin(\pi x/l)$ (рис. 4) та $y = 0.5(1 - \cos(2\pi x/l))$ (рис. 5), при $l = 1$ м.

Як видно з графіків на рис. 4, 5 та порівняльних даних у табл. 1, 2, для розглянутих функцій значення похідних по x , що визначені методом апроксимації поліноміальними функціями з подальшим їх диференціюванням практично не відрізняються від значень похідних, які отримуються внаслідок аналітичного диференціювання розглянутих функцій.

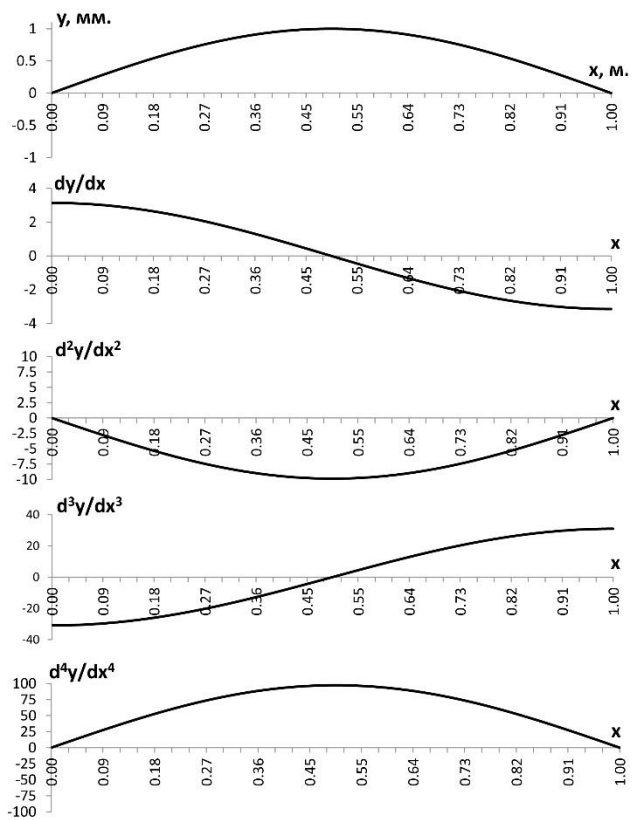


Рисунок 4 – Форма вигину, що задана функцією $y = \sin(\pi x/l)$, та її перші чотири похідні

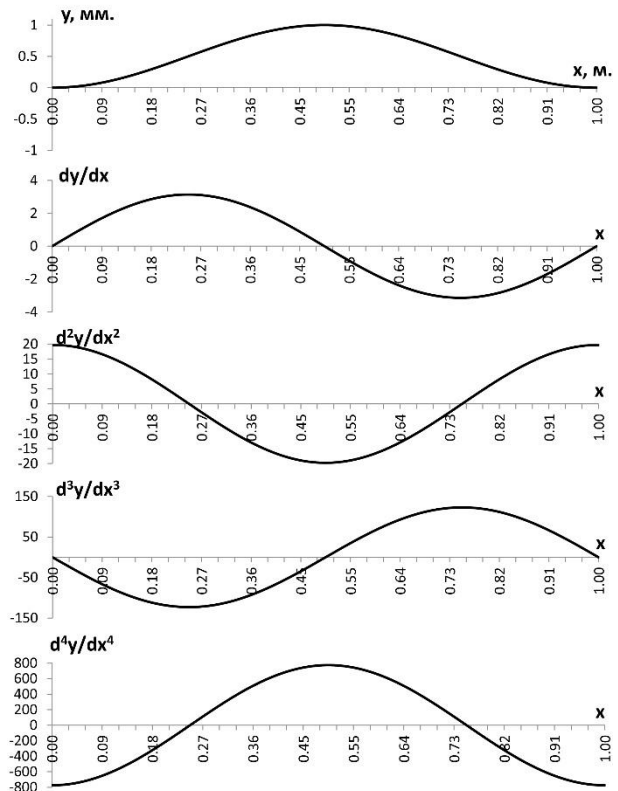


Рисунок 5 – Форма вигину, що задана функцією $y = 0.5(1 - \cos(2\pi x/l))$, та її перші чотири похідні

Таблиця 1 - Апроксимація та чисельне диференціювання функції $y = \sin(\pi x/l)$

x	y			y'			y''			y'''			y''''		
	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%
0,000	0,0000	0,0000	0,00%	3,1416	3,1416	0,00%	0,0000	0,0000	0,00%	-31,006	-30,940	-0,21%	0,000	0,000	0,00%
0,059	0,1837	0,1837	0,00%	3,0881	3,0881	0,00%	-1,8135	-1,8135	0,00%	-30,478	-30,413	-0,21%	17,90	17,87	0,14%
0,118	0,3612	0,3612	0,00%	2,9294	2,9294	0,00%	-3,5653	-3,5653	0,00%	-28,912	-28,851	-0,21%	35,19	35,14	0,14%
0,176	0,5264	0,5264	0,00%	2,6710	2,6710	0,00%	-5,1957	-5,1957	0,00%	-26,362	-26,306	-0,21%	51,28	51,21	0,14%
0,235	0,6737	0,6737	0,00%	2,3217	2,3217	0,00%	-6,6491	-6,6491	0,00%	-22,914	-22,865	-0,21%	65,62	65,53	0,14%
0,294	0,7980	0,7980	0,00%	1,8932	1,8932	0,00%	-7,8761	-7,8761	0,00%	-18,685	-18,646	-0,21%	77,73	77,62	0,14%
0,353	0,8952	0,8952	0,00%	1,4003	1,4003	0,00%	-8,8349	-8,8349	0,00%	-13,821	-13,791	-0,21%	87,20	87,07	0,14%
0,412	0,9618	0,9618	0,00%	0,8597	0,8597	0,00%	-9,4928	-9,4928	0,00%	-8,485	-8,467	-0,21%	93,69	93,56	0,14%
0,471	0,9957	0,9957	0,00%	0,2899	0,2899	0,00%	-9,8275	-9,8275	0,00%	-2,861	-2,855	-0,21%	96,99	96,86	0,14%
0,500	1,0000	1,0000	0,00%	0,0000	0,0000	0,00%	-9,8696	-9,8696	0,00%	0,000	0,000	0,00%	97,41	97,27	0,14%
0,529	0,9957	0,9957	0,00%	-0,2899	-0,2899	0,00%	-9,8275	-9,8275	0,00%	2,861	2,855	-0,21%	96,99	96,86	0,14%
0,588	0,9618	0,9618	0,00%	-0,8597	-0,8597	0,00%	-9,4928	-9,4928	0,00%	8,485	8,467	-0,21%	93,69	93,56	0,14%
0,647	0,8952	0,8952	0,00%	-1,4003	-1,4003	0,00%	-8,8349	-8,8349	0,00%	13,821	13,791	-0,21%	87,20	87,07	0,14%
0,706	0,7980	0,7980	0,00%	-1,8932	-1,8932	0,00%	-7,8761	-7,8761	0,00%	18,685	18,646	-0,21%	77,73	77,62	0,14%
0,765	0,6737	0,6737	0,00%	-2,3217	-2,3217	0,00%	-6,6491	-6,6491	0,00%	22,914	22,865	-0,21%	65,62	65,53	0,14%
0,824	0,5264	0,5264	0,00%	-2,6710	-2,6710	0,00%	-5,1957	-5,1957	0,00%	26,362	26,306	-0,21%	51,28	51,21	0,14%
0,882	0,3612	0,3612	0,00%	-2,9294	-2,9294	0,00%	-3,5653	-3,5653	0,00%	28,912	28,851	-0,21%	35,19	35,14	0,14%
0,941	0,1837	0,1837	0,00%	-3,0881	-3,0881	0,00%	-1,8135	-1,8135	0,00%	30,478	30,413	-0,21%	17,90	17,87	0,14%
1,000	0,0000	0,0000	0,00%	-3,1416	-3,1416	0,00%	0,0000	0,0000	0,00%	31,006	30,940	-0,21%	0,000	0,000	0,00%

Примітки: (1) – вихідна функція $y = \sin(\pi x/l)$ та її похідні, визначені аналітично;
(2) – результат апроксимації і диференціювання розглянутим методом.

Таблиця 2 - Апроксимація та чисельне диференціювання функції $y = 0.5(1 - \cos(2\pi x/l))$

x	y			y'			y''			y'''			y''''		
	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%	(1)	(2)	Δ,%
0,000	0,0000	0,0000	0,00%	0,0000	0,0000	0,00%	19,7392	19,7390	0,001%	0,00	0,00	0,00%	-779,27	-777,10	0,28%
0,059	0,0338	0,0338	0,00%	1,1349	1,1349	0,00%	18,4063	18,4060	0,001%	-44,80	-44,62	0,42%	-726,65	-724,62	0,28%
0,118	0,1305	0,1305	0,00%	2,1165	2,1165	0,00%	14,5875	14,5873	0,001%	-83,56	-83,21	0,42%	-575,89	-574,28	0,28%
0,176	0,2771	0,2771	0,00%	2,8122	2,8122	0,00%	8,7985	8,7984	0,001%	-111,02	-110,56	0,42%	-347,35	-346,38	0,28%
0,235	0,4539	0,4539	0,00%	3,1282	3,1282	0,00%	1,8213	1,8213	0,001%	-123,50	-122,98	0,42%	-71,90	-71,70	0,28%
0,294	0,6368	0,6368	0,00%	3,0217	3,0217	0,00%	-5,4019	-5,4018	0,001%	-119,29	-118,79	0,42%	213,26	212,66	0,28%
0,353	0,8013	0,8013	0,00%	2,5070	2,5070	0,00%	-11,8955	-11,8954	0,001%	-98,97	-98,56	0,42%	469,62	468,31	0,28%
0,412	0,9251	0,9251	0,00%	1,6538	1,6538	0,00%	-16,7826	-16,7824	0,001%	-65,29	-65,02	0,42%	662,55	660,70	0,28%
0,471	0,9915	0,9915	0,00%	0,5773	0,5773	0,00%	-19,4031	-19,4029	0,001%	-22,79	-22,69	0,42%	766,00	763,87	0,28%
0,500	1,0000	1,0000	0,00%	0,0000	0,0000	0,00%	-19,7392	-19,7390	0,001%	0,00	0,00	0,00%	779,27	777,10	0,28%
0,529	0,9915	0,9915	0,00%	-0,5773	-0,5773	0,00%	-19,4031	-19,4029	0,001%	22,79	22,69	0,42%	766,00	763,87	0,28%
0,588	0,9251	0,9251	0,00%	-1,6538	-1,6538	0,00%	-16,7826	-16,7824	0,001%	65,29	65,02	0,42%	662,55	660,70	0,28%
0,647	0,8013	0,8013	0,00%	-2,5070	-2,5070	0,00%	-11,8955	-11,8954	0,001%	98,97	98,56	0,42%	469,62	468,31	0,28%
0,706	0,6368	0,6368	0,00%	-3,0217	-3,0217	0,00%	-5,4019	-5,4018	0,001%	119,29	118,79	0,42%	213,26	212,66	0,28%
0,765	0,4539	0,4539	0,00%	-3,1282	-3,1282	0,00%	1,8213	1,8213	0,001%	123,50	122,98	0,42%	-71,90	-71,70	0,28%
0,824	0,2771	0,2771	0,00%	-2,8122	-2,8122	0,00%	8,7985	8,7984	0,001%	111,02	110,56	0,42%	-347,35	-346,38	0,28%
0,882	0,1305	0,1305	0,00%	-2,1165	-2,1165	0,00%	14,5875	14,5873	0,001%	83,56	83,21	0,42%	-575,89	-574,28	0,28%
0,941	0,0338	0,0338	0,00%	-1,1349	-1,1349	0,00%	18,4063	18,4060	0,001%	44,80	44,62	0,42%	-726,65	-724,62	0,28%
1,000	0,0000	0,0000	0,00%	0,0000	0,0000	0,00%	19,7392	19,7390	0,001%	0,00	0,00	0,00%	-779,27	-777,10	0,28%

Примітки: (1) – вихідна функція $y = 0.5(1 - \cos(2\pi x/l))$ та її похідні, визначені аналітично;
(2) – результат апроксимації і диференціювання розглянутим методом.

Для функції $y = \sin(\pi x/l)$ різниця між значеннями самої функції та результатом апроксимації становить 0%, різниця між першими, другими похідними від вихідної функції та результатом диференціювання апроксимованої також становить 0%, різниця між третіми похідними становить 0,21%, між четвертими – 0,14%.

Для функції $y = 0,5(1 - \cos(2\pi x/l))$ різниця між значеннями самої функції та результатом апроксимації становить 0%, різниця між першими

похідними від вихідної функції та результатом диференціювання апроксимованої також становить 0%, різниця між другими похідними становить 0,001%, між третіми – 0,42%, між четвертими – 0,28%.

Висновки

Запропонована методика чисельного диференціювання форм вигину стержнів дає змогу

здійснювати дослідження динаміки руху об'єктів, які моделюються стержнями значної довжини. Як показують продемонстровані в статті результати диференціювання, значення похідних, що визначені методом апроксимації поліноміальними функціями з подальшим їх диференціюванням практично не відрізняються від значень похідних, які отримуються внаслідок аналітичного диференціювання заданих функцій.

Залежності всіх необхідних похідних від довжини є неперервними гладкими лініями. Це свідчить про те, що запропонована методика чисельного диференціювання надає практично точний результат диференціювання, забезпечує неперервність та гладкість функцій всіх чотирьох похідних від сплайну, що описує форму вигину, і може застосовуватись при дослідженні динаміки коливального руху стержнів значної довжини.

Список літератури

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее применение. Москва : Мир, 1972.
2. Баженов В. А., Погорелова О. С., Постнікова Т. Г. Хаос та сценарії переходу до хаосу у віброударній системі. Київ: Вид-во «Каравела», 2019. 146 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2015. 639 с.
4. Гуляев В. И. Бифуркационное выпучивание вертикальных колонн сверхглубокого бурения. / В. И. Гуляев, В. В. Гайдайчук, И. В. Горбунович. *Промислове будівництво та інженерні споруди*. 2009. №2. С. 10–15.
5. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Худой С. Н. Компьютерное моделирование динамики конструкций установок глубокого бурения. *Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського*. 2009. Вип. 4. С. 208–216.
6. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. Москва : Наука, 1980. 352 с.
7. Лізунов П. П., Недін В. О. Параметричні коливання пружних стрижнів, що обертаються, під дією періодичних поздовжніх сил. *Управління розвитком складних систем*. 2021. № 44. С. 56 – 64.
8. Лізунов П. П., Недін В. О. Вплив гіроскопічних сил на коливальний рух валів при обертанні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2020. Вип. 105. С. 223 – 231.
9. Недін В. О. Чисельне диференціювання складних форм вигину стрижнів значної довжини при обертанні. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 43. С. 110 – 115.
10. Maurice Petyt. Introduction to Finite Element Vibration Analysis. Cambridge University Press, 1990. 558 p.

Стаття надійшла до редколегії 14.05.2021

Lizunov Petro

DSc(Eng.), Professor, Head of Department of Computer Sciences, orcid.org/0000-0003-2924-3025
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Nedin Valenty

PhD (Eng.), Department of Computer Sciences, orcid.org/0000-0003-3138-2892
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

NUMERICAL DIFFERENTIATION OF BEND FORMS OF THE LONG ELASTIC RODS

Abstract. The technique of numerical differentiation of the bend forms of long elastic rods is presented. This technique is based on search for new bend forms of the rod by solving the equations of oscillations with using the time integration method and the polynomial spline-functions that are being described the current bend form. In it, the spline-functions are found by current bend form approximation where each of the found functions is responsible to certain point of rod elastic line and describes the position of nearby points. Using the described approximation technique with subsequent numerical differentiation, the dependences of the derivatives on an arbitrary bend form of the rod with a length that is equal to 100 m are shown. To confirm the reliability, the results of numerical differentiation of the bend forms of the elastic rods described by given functions are presented and the numerical results obtained using the proposed method are compared with the results of analytical differentiation of the original functions. The graphs of values derivatives dependence to rod length are drawn and tables with numerical values of differentiation results are shown. It is concluded that the considered technique of numerical differentiation of rods bend forms allows to do the research of dynamics of rod systems. It gives the exact result of differentiation, provides the continuity and smoothness of all four derivatives functions of spline that are being described the bend form with considerable length. Described technique was realized in a computer program with graphic user interface. Program allows to monitor for dynamics of the oscillatory motion of the modeled system in real-time by calculating and drawing the current band forms of the rotating rod during the oscillation.

Keywords: approximation; numerical differentiation; spline-functions; geometric nonlinea

References

1. Ahlberg, J., Nilson, E., Walsh, J. (1972). Spline theory and its application. Moscow: Peace, 319. [In Russian]
2. Bazhenov, V. A., Pohorelova, O. S., Postnikova, T. G. (2019). Khaos ta stsenariyi perekhodu do khaosu u vibroudarniy systemi. Kyiv: Vyd-vo «Karavela», 146.
3. Bakhvalov, N. S., Judkov, N. P., Kobelkov, G. M. (2015). Numerical methods. Moscow: BINOM, Laboratory of Knowledge, 639. [In Russian]
4. Gulyayev, V. I., Gaydaychuk, V. V., Gorbunovich, I. V. (2009). Bifurcational buckling of vertical super-deep drilling columns. *Promyslove budivnytstvo ta inzhenerni sporudy*, 2, 10–15.
5. Gulyayev, V. I., Gaydaychuk, V. V., Xudolij, S. N. (2009). Computer modeling of dynamics of deep drilling rigs' constructions. *Scientific Works Journal of the Ukrainian Research Institute of Steel Structures named after V. M. Szymanowski*, 4, 208–216. [In Russian]
6. Zavyalov, Y. S., Kvasov, B. I., Miroshnichenko, V. L. (1980). Spline functions methods. Moscow: Science, 352. [In Russian]
7. Lizunov, Petro, Nedin, Valentyn. (2020). The parametric oscillations of rotating elastic rods under the action of the periodic axial forces. *Management of Development of Complex Systems*, 44, 56–64.
8. Lizunov, P. P., Nedin, V. O. (2020). The gyroscopic forces influence on the oscillations of the rotating shafts. *Strength of materials and theory of structures*, 105, 223–231.
9. Nedin, Valentyn, (2020). Numerical differentiation of complex bend forms of long rotating rods. *Management of Development of Complex Systems*, 43, 110–115, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.43.110-115. [in Ukrainian]
10. Maurice, Petyt. (1990). Introduction to Finite Element Vibration Analysis. Cambridge University Press, 558.

Посилання на публікацію

- APA Lizunov, Petro, Nedin, Valentyn. (2021). Numerical differentiation of bend forms of the long elastic rods. *Management of Development of Complex Systems*, 46, 70–75, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75.
- ДСТУ Лізунов П. П., Недін В. О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2021. № 46. С. 70 – 75, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75.