DOI: 10.6084/m9.figshare.11969049
УДК: [004.4+514.1+513.3]

Ботвіновська Світлана Іванівна
Доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки, *orcid.org/0000-0002-1832-1342*
Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Васько Сергій Михайлович
Кандидат технічних наук, старший викладач кафедри комп'ютерних технологій і моделювання систем, *orcid.org/0000-0002-6868-861X*
Житомирський національний агроекологічний університет, Житомир
Суліменко Ганна Генадіївна
Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних технологій та моделювання систем, *orcid.org/0000-0002-2454-1675*
Житомирський національний агроекологічний університет, Житомир

ОСОБЛИВОСТІ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ АРХІТЕКТУРИ І ДИЗАЙНУ, ДО СКЛАДУ ЯКИХ ВХОДЯТЬ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Анотація. *Розглянуто моделювання геометричних об'єктів з урахуванням їх бажаного обрису на перспективних зображеннях. Конкретним об'єктом дослідження є поверхні обертання другого порядку (квадрики обертання). За обвідним конусом другого порядку такі поверхні можуть бути побудовані і при використанні відомого алгоритму, розробленого для довільних поверхонь обертання. У роботі запропоновано новий метод, що базується на особливостях квадрик обертання. Встановлено, що дві точки задані на поверхні конусу, за умови їх належності до поверхні, що моделюється, задають дві квадрики обертання. У рамках задачі під лініями контакту розуміємо тільки перерізи площинами, які перпендикулярні до площин симетрії конусу. Доведено справедливість такого: перпендикуляри до обвідного конуса в точках лінії контакту перетинають площину симетрії в точках, що лежать на одній прямій; лінія контакту, що задана на обвідному конусі, однозначно визначає або вписану в конус, або описану навколо нього квадрику обертання. При цьому вона однозначно визначає вісь квадрики обертання, її меридіан та центр квадрики. На основі доведених властивостей запропоновано і реалізовано в системі SolidWorks алгоритм моделювання квадрик обертання за їх лініями обрису на перспективних зображеннях, визначено межі його застосування, наведено приклади.*

Ключові слова: квадрика обертання; лінія контакту; лінія обрису квадрики;перспективне зображення; спряження поверхонь; обвідний конус

Постановка проблеми

Дослідження присвячені проблемі моделювання об'єктів з урахуванням бажаного їх обрису на перспективних зображеннях. Це передусім стосується об'єктів криволінійних форм.

Відомо, що геометричні методи мають більшу стабільність щодо можливих похибок обчислень. У них більш надійно можуть бути обрані межі, в яких змінюються параметри обчислень. Також геометричні методи дають змогу візуально контролювати як процес моделювання, так і його результат. Комп'ютерні графічні системи акумулюють і постачають конструкторам та іншим користувачам широкий спектр інструментів для роботи. Проте не всі задачі можуть бути розв'язані без додаткових досліджень навіть самими потужними графічними системами. Тому, поєднання комп'ютерного інструментарію з науковими напрацюваннями щодо його використання при створенні алгоритмів моделювання є сучасною актуальною та плідною гілкою наукових геометричних досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Сучасний розвиток комп'ютерних технологій привів до того, що багато дослідників знову почали вивчати можливості використання як інструментарію криві та поверхні другого порядку [1]. Це пов'язано з простотою їх аналітичних описів і добре вивченими унікальними властивостями.

Сучасні роботи з прикладної геометрії базуються на різних підходах моделювання: конструктивному, аналітичному та дискретному.

Так, у роботі [2] за допомогою статико-геометричного методу поверхні другого і вищих порядків (параболоїди) використовуються для моделювання більш складних поверхонь, які втім наслідують деякі властивості параболоїдів. У результаті, отримані поверхні параболічного типу за геометричними властивостями можуть використовуватись для ескізного проєктування криволінійних покриттів в архітектурі.

У роботах [3; 4] автори в традиційній аналітичній формі проводять детальний параметричний аналіз можливостей побудови поверхонь другого порядку (квадрик) за заданою кількістю точок, і досліджують вплив заданих умов на властивості та форму поверхонь. Багато досліджень, які стосуються поверхонь другого порядку виконано на основі сучасної парадигми комп'ютерного моделювання. Так, у [5] автором запропоновано і реалізовано конструктивний метод побудови квадрики за дев'ятьма точками.

Наприкінці минулого століття заснована нова гілка геометрії – дискретна диференціальна геометрія [6]. У ній основні теореми диференціальної геометрії доводяться на основі конструктивно-логічних міркувань з мінімальним залученням аналітичних залежностей. У роботі [7] введено поняття дискретної конгруенції, яке стало потужним інструментом моделювання. Зокрема, результат цієї роботи полягає в тому, що дискретна конгруенція обмежується на двопараметричну множину квадрик. Це говорить про те, що квадрики не втратили своє значення не тільки у практичному сенсі, а і у теоретико-геометричному.

Побудова квадрик за обвідними конусами базується на тому, що лінія контакту конуса та квадрики, є кривою другого порядку (конікою). Цей результат був отриманий ще засновником нарисної геометрії Г. Монжем у роботі [8] і є основою методів побудови квадрик за обвідними конусами. Задача має дві постановки. Перша – реконструкція квадрики за її зображенням. Такі дослідження представлені у роботі [9]. У своїх дослідженнях автор аналізує відбиття світла від поверхні квадрики. Це дає змогу однозначно визначити квадрику, навіть не знаючи центрів обвідних конусів. Друга постановка – моделювання поверхонь у середовищі графічної комп'ютерної системи. У цьому разі конструктор задає бажані лінії обрису з бажаних точок зору.

Серед криволінійних форм, що найчастіше застосовуються при проєктуванні в архітектурі та дизайні, особливе місце посідають поверхні обертання. Цим обумовлена зацікавленість геометрів у дослідженні особливостей таких поверхонь при їх комп'ютерному проєктуванні. У роботі [10] висвітлюються питання моделювання сферичних об'єктів за їх лініями обрисів, а робота [11] присвячена моделюванню конічних та циліндричних поверхонь на перспективних зображеннях.

Комплексний аналіз задач моделювання об'єктів за лініями обрису поверхонь обертання та технологія їх комп'ютерного моделювання пропонуються у роботі [12]. Лінії обрису поверхонь обертання мають таку загальну властивість, що конуси, які їх породжують повинні бути симетричними. Включення обвідного конуса у визначник поверхні, що моделюється, дає змогу задавати багатопараметричну множину поверхонь. Це не тільки поверхні обертання, а і поверхні другого порядку загального вигляду, довільні поверхні з площиною симетрії та багато інших.

Умова симетрії дотичного конуса у загальному процесі моделювання є обтяжливою умовою. Але тільки за таких конусів можуть бути побудовані моделі поверхонь обертання та поверхонь другого порядку загального вигляду. Ці дві множини мають спільну підмножину: поверхні обертання другого порядку (квадрики обертання). Особливості їх моделювання за дотичними конусами і є предметом дослідження. У роботі [12] розглядаються п'ять етапів технології моделювання поверхонь за дотичними конусами поверхонь обертання. Це формування початкової інформації (I етап), формалізація цієї інформації (II етап), формування лінії обрису (III етап), формування поверхонь (IV етап), облаштування об'єкта формоутворення (V етап). Особливості щодо поверхонь обертання другого порядку присутні на третьому та четвертому етапах.

Лінія обрису квадрики на перспективному зображенні – крива другого порядку. А отже, обвідний конус буде конусом другого порядку, який вилучає, у процесі моделювання квадрики, п'ять із дев'яти параметрів [12]. Квадрики обертання, на відміну від квадрики загального вигляду, залежать від семи параметрів. Тому вільними для моделювання залишаються два параметри. Вони повністю реалізуються завданням осі обертання в одній із площин симетрії [13]. Побудова поверхонь може бути виконана за запропонованим у [14] підходом, за якого кожна точка лінії обрису d визначає у просторі точку лінії контакту k за трьома умовами інциденції. Так, точка лінії контакту k, яка є відповідною поточній точці лінії обрису d, належить як площині дотику до конуса в поточній точці лінії обрису, так і площині, що перпендикулярна до поточної площини дотику і проходить через вісь поверхні обертання. Ці дві умови визначають пряму, якій належить точка лінії контакту. Третьою умовою є належність шуканої точки поточній твірній конуса.

Такий підхід не враховує особливості квадрик обертання у порівнянні з поверхнями обертання загального виду, тому актуальною є задача розробки більш ефективного алгоритму побудови квадрик обертання.

Мета статті

Мета – удосконалення методу побудови квадрики обертання за заданими обвідними конусами. Цей метод має базуватися на внутрішніх властивостях квадрик обертання і формувати початкові умови, спрямовані на отримання бажаного результату.

Виклад основного матеріалу дослідження

Лінія контакту квадрики обертання належить площині, що перпендикулярна площині симетрії, а таку, через дві задані точки, можемо провести тільки одну. Тому дві точки A і B визначають лінію контакту k квадрики обертання як переріз обвідного конуса площиною, що проходить через дві точки перпендикулярно площині симетрії. На основі цього в дослідженнях пропонується новий підхід до моделювання квадрик обертання за дотичними конусами.

З параметричної точки зору задання осі обертання в площині симетрії обвідного конуса еквівалентно заданню двох точок, що належать квадриці обертання. Ці точки можуть бути задані як всередині конуса, так і на його поверхні. Останній випадок має просту конструктивну схему реалізації. Дійсно, задання двох довільних точок на поверхні конуса означає, що вони мають бути спільними точками конуса і вписаної в нього квадрики обертання. Тобто,ці дві точки належать їх спільній лінії контакту. Покажемо, як за цими двома точками можна побудувати вісь поверхні обертання і поверхню в цілому без застосування загального алгоритму побудови поверхні обертання.

Дійсно, у довільній точці лінії контакту обвідний конус та вписана поверхня мають спільну дотичну площину. Перпендикуляр, що проведено в точці контакту до дотичної площини – геометричне місце центрів сфер, що дотичні як до поверхні обертання, так і до обвідного її конуса. Але, через кожну точку поверхні обертання проходить дотична сфера, центр якої належить осі обертання. У свою чергу вісь поверхні обертання належить площині симетрії обвідного конуса. Тому, точка перетину означеного перпендикуляра з площиною симетрії конуса буде належати осі квадрики обертання. Положення осі залежить від двох параметрів, тому таких точок має бути дві. Зазначимо, що для побудови осі обертання не можуть бути використані точки лінії контакту, що належать площині симетрії конуса.

Однак інформація про точки контура теж є важливою, бо на основі цих точок, при знайденій осі обертання, визначається меридіан поверхні обертання, що належить площині симетрії конуса. Дійсно, в цій площині маємо:

– дві точки лінії контакту;
– дотичні в цих точках, які визначаються твірними конуса в цих точках;
– центр меридіана, що належить осі поверхні обертання та прямій, яка з'єднує вершину конуса з серединою осі лінії контакту.

Сукупність цих умов визначає криву другого порядку, вісь якої буде збігатись з віссю обертання шуканої квадрики. Тобто, така крива буде меридіаном цієї квадрики. Центр самої кривої буде і центром квадрики обертання.

З оглядом на те, що конус другого порядку має дві площини симетрії, за двома заданими на ньому точками можуть бути побудовані дві вписані поверхні обертання. Вибір однієї з них залежить від того, до якої площини симетрії проводимо перпендикулярну площину з метою визначення лінії контакту. Якщо точки A та B задані на одній твірній конуса, то лінія контакту буде виродженою кривою другого порядку, а саме двома твірними конуса. У цьому випадку отримуємо один конус обертання, що вписаний у конус другого порядку. Якщо ж заданий конус другого порядку є конусом обертання, то побудований конус збігається із заданим.

Отже, на основі наведених теоретичних положень, пропонується алгоритм побудови квадрики обертання, що вписана в конус другого порядку, площини симетрії якого відомі. Конус задано лінією обрису d у площині картини K та точкою зору S. Площини Δ_1та Δ_2 – площини симетрії конуса другого порядку (рис. 1, 2).

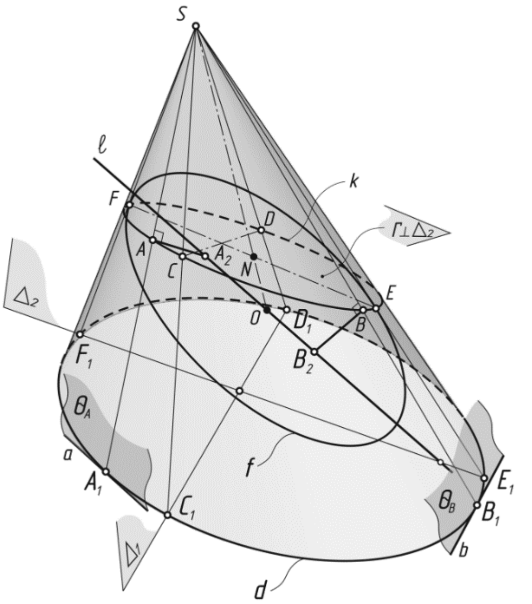
Крок 1. На поверхні конуса задаємо довільно, або з деяких конструктивних міркувань, точки A та B. Для цього на лінії обрису d задаємо точки A_1 та B_1 і на твірних SA_1 та SB_1 позначаємо обрані точки. Дотичні прямі a та b до лінії обрису в точках A_1 та B_1, разом з твірними конуса, задають площини ΘA і ΘB, дотичні до конуса в точках A та B.

Крок 2. У точках A та B будуємо прямі, перпендикулярні до площин ΘA і ΘB. Точки A_2 та B_2 – точки їх перетину з площиною симетрії Δ_2 (рис. 1, *а*), а точки A'_2 та B'_2 – точки їх перетину з площиною симетрії Δ_1 (рис. 2, *а*). Точки A_2 та B_2 визначають вісь ℓ поверхні обертання (точки A'_2 та B'_2 – вісьℓ' другої поверхні обертання).

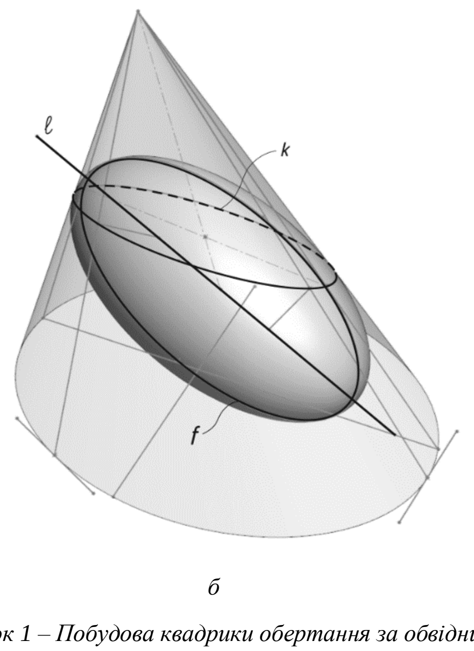
Крок 3. Через точки A та B проводять площинуΓ, перпендикулярну площині Δ_2 (рис. 1, *а*) та площину Γ', перпендикулярну площині Δ_1 (рис. 2, *а*). Перерізи конуса S площинами Γ та Γ' визначають криві k та k' – коніки контакту конуса та вписаних у нього поверхонь обертання з осями ℓ та ℓ'. На твірних конуса, які належать площині Δ_2 (Δ_1)

у перетині з площиною Γ (Γ') визначаються точки E та F (C та D). Це будуть точки меридіанів f та f', які належать площинам Δ_2, Δ_1, відповідно. Для визначення меридіанів маємо: дві точки E та F (C та D); твірні конуса SE та SF (SC та SD), що дотичні до меридіанів; центри меридіанів – точки O та O'. Останні отримуємо, з'єднуючи середини хорд EF (CD); – точку N (N'), з вершиною S. Перетин прямої SN (SN') з віссю ℓ (ℓ') визначає точку O (O')– центр меридіана f (f').

Крок 4. Визначаємо меридіани та поверхні обертання. На рис. 1, *б*, рис. 2, *б* показані обидві побудовані поверхні.

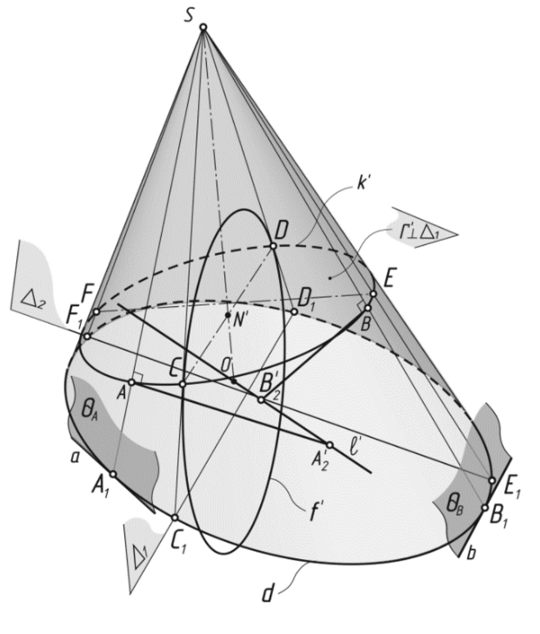


а

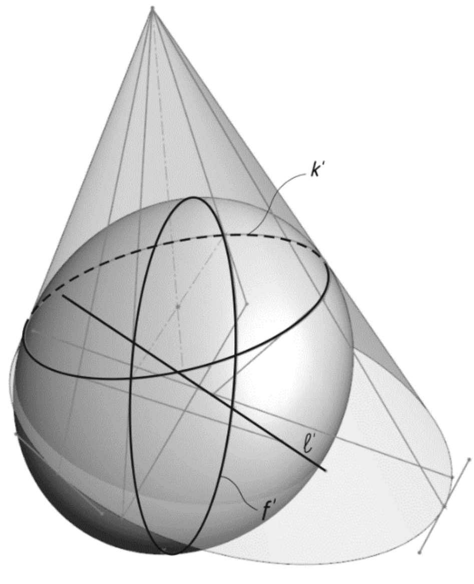


б

Рисунок 1 – Побудова квадрики обертання за обвідним конусом з використанням площини симетрії Δ_2: а – схема побудови; б – змодельована поверхня



а



б

Рисунок 2 – Побудова квадрики обертання за обвідним конусом з використанням площини симетрії Δ_1: а – схема побудови; б – змодельована поверхня

Метод побудови квадрики обертання, вписаної в заданий конус другого порядку, отримано на основі конструктивно-логічних міркувань. Результат цих міркувань можна сформулювати без поняття квадрики обертання.

Властивість. *Нехай точки конуса другого порядку належать площині, перпендикулярній площині симетрії конуса. Тоді, нормалі до конуса у цих точках будуть перетинати цю площину симетрії в точках, що лежать на одній прямій.*

З конструктивних міркувань конус другого порядку можна замінити довільною квадрикою Ω. Дійсно, нехай на квадриці Ω задано криву k, як переріз Ω площиною перпендикулярною до її площини симетрії Δ. Тоді крива k та конус з лінією контакту k (конус Sk) будуть мати спільну площину симетрії Δ. Конус Sk визначає однопараметричну множину квадрик $\Omega\alpha$ як вписаних в нього, так і описаних навколо нього(теорема Монжа). Але серед них буде тільки одна квадрика обертання Ω_O.

Тобто, для побудови Ω_O не обов'язково використовувати конус, а достатньо буде якоїсь поверхні з однопараметричної множини $\Omega\alpha$. В цьому разі, коли $\Omega\alpha$ – конус другого порядку при деяких положеннях кривої k, можлива побудова Ω_O, описаної навколоконусу. Така Ω_O – однопорожнинний гіперболоїд, а вершина S дотичного конуса належить його внутрішній порожнині.Залежність виду поверхні обертання Ω_O від параметрів конуса та параметрів січної площини кривої k не є «прозорою», тому корисно отримати її аналітичний вираз.

Крім того, це буде математичне підтвердження справедливості властивості.

Конус другого порядку, зображений на схемі (рис.3), має рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-y^2=0\,.$$

Координатну площину Oxy обрано як основну площину симетрії Δ. На конусі задано три довільні точки $1, 2$ та 3 (ці точки на рисунку не показані).

Умова того, що їх прямокутні проєкції на площину Δ належать одній прямій [15] має вигляд:

$$\delta(1,2,3)=x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+ \\ +x_3(y_1-y_2)=0. \qquad (1)$$

Складемо рівняння нормалей до конуса в цих точках [15]:

$$\frac{x-x_i}{\frac{1}{a^2}x_i}=\frac{z-z_i}{\frac{1}{b^2}z_i}=\frac{y-y_i}{-y_i},\ i=1,2,3\,.$$

При їх перетині з площиною z=0 отримуємо точки $1',2',3'$, координати яких задовольняють умову:

$$a^2\frac{x_i'-x_i}{x_i}=-b^2=\frac{y_i'-y_i}{-y_i},\ i=1,2,3\,.$$

або

$$x_i'=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_i;\quad y_i'=(1+b^2)y_i, \\ i=1,2,3. \qquad (2)$$

Складаючи як для точок $1,2,3$ умову належності точок $1',2',3'$ одній прямій і виносячи за дужки спільний множник, будемо мати:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}(1+b^2)\cdot\delta(1,2,3)\equiv 0\,. \qquad (3)$$

Умова (3) виконується тотожно відносно a та b (при $a\neq 0$), бо згідно (1) $\delta(1,2,3)=0$ і не залежить від a та b. При $a = b$ вона буде тотожно виконуватись і для тих точок, які не задовольняють умову (1). Тобто, виконання умови (1) забезпечує виконання умови (3), що доводить властивість. Це очікуваний результат, бо формули (2) записані у вигляді:

$$x'=\frac{a^2-b^2}{a^2}x;\quad y'=(1+b^2)y, \\ i=1,2,3, \qquad (4)$$

є формулами афінного перетворення площини, а саме є формулами масштабування відносно початку системи координат.

Використання цих формул дає ту перевагу, що вони діють на всій площині і можуть бути застосовані також до точок F та E, які належать контурним твірним у площині $\Delta\perp Oxy$ (рис. 3).

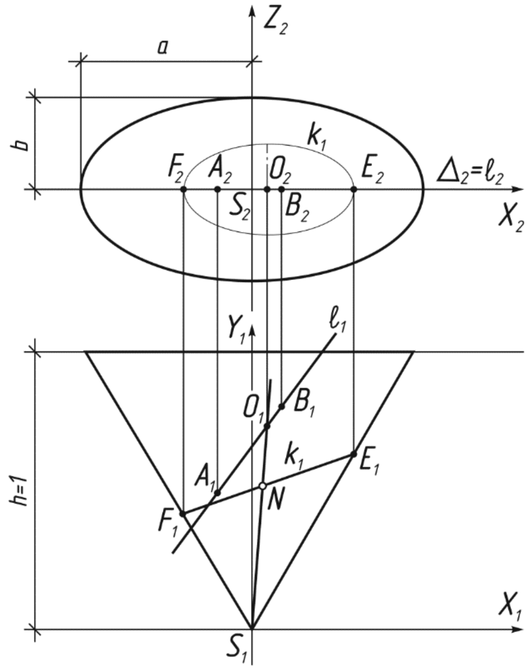


Рисунок 3 – Схема побудови осі обертання ℓ за аналітичними залежностями

Задаючи координати цих точок y_F, y_E на основі рівнянь контурних твірних ($x=-ay$ та $x=ay$) отримуємо координати двох точок $F(-ay_F,\ y_F)$ та $E(ay_E,\ y_E)$.

Перетворюючи ці точки за (4), отримуємо дві точки осі обертання A та B:

$$\begin{cases} x_A=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cdot(-y_F) \\ y_A=(1+b^2)\cdot y_F \end{cases} \quad \begin{cases} x_B=\dfrac{a^2-b^2}{a}\cdot y_E \\ y_B=(1+b^2)\cdot y_E \end{cases}. \qquad (5)$$

За абсцисами точок F (y_F) та E(y_E) можуть бути знайдені: рівняння діаметра кривої контакту (FE); координати точки N середини відрізка FE; координати точок A та B осі обертання, знайдені за формулою (5); рівняння осі ℓ (*AB*); рівняння прямої *SN*; координати точки *O* перетину прямих *SN* та *AB*. Остання буде центром поверхні обертання вписаної (описаної) навколо конуса і визначиться залежністю:

$$O = O(a, b, y_F, y_E)\,, \qquad (6)$$

де параметри *a*,*b* – параметри заданого конуса; y_F,y_E – параметри положення прямокутної проєкції лінії контакту на площину *Δ*.

Параметри *a* та *b*можна вважати сталими, як задані за умовою. Один з параметрів y_F або y_E, теж можна вважати сталим (наприклад y_E). Це обумовлено тим, що формули (4) задають афінне перетворення, яке зберігає паралельність прямих: тобто, змінюючи положення прямої *EF* так, що $(EF) \,/\!/\, (EF)_i$, де $i=1,2,\ldots,n$, отримаємо множину осей $\ell \parallel \ell_i$. У свою чергу, точка *O* належить відомій прямій *SN* і для її визначення достатньо одного параметра, наприклад y_O.

Формула (6) визначає залежність $y_O = f\,(y_E)$, а також обернену $y_E = \varphi\,(y_O)$.

Використовувати першу залежність немає потреби, бо моделювання має проводитися в середовищі графічної комп'ютерної системи, де всі ці побудови імплантовані у програмне забезпечення. Друга залежність корисна для аналізу. Ця залежність дає змогу, за бажаним положенням центра (точки *O*) модельованої поверхні, визначити положення точки *E*, а тим самим слід площини лінії контакту на площині *Δ*. Положення точки *O* встановлює вигляд змодельованої поверхні обертання. А саме:

– якщо точка *N* поділяє точки *S* та *O* – отримуємо вписаний еліпсоїд обертання;

– якщо точка *S* поділяє точки *O* та *N* – вписаний двопорожнинний гіперболоїд;

– якщо точка *O* поділяє точки *S* та *N* маємо описаний однопорожнинний гіперболоїд обертання;

– якщо ж точка *O* невласна – вписаний параболоїд обертання.

Останній випадок вимагає додаткових досліджень. Не встановлено чи може, в цьому разі, вісь проходити через задану точку, бо параболоїд має менше параметричне число. Запропоновані дослідження наводяться в якості постановки та параметричного аналізу задачі. Але, і без їх урахування, тільки на основі приведених конструктивних міркувань, можуть бути сформульовані деякі особливості моделювання. Ці особливості стосуються питання існування розв'язків взагалі та їх кількості.

Нехай лінія обрису та точка зору задають конус другого порядку. І нехай на ньому визначено переріз *k*, площина якого перпендикулярна площині симетрії конуса. Якщо крива *k* не є колом, то існує одна і тільки одна поверхня обертання, вписана у цей конус (описана навколо нього) за заданою лінією контакту *k*.

У випадку кругового перерізу конуса другого порядку рішення не існує. Це випливає з такого. Якщо лінія обрису *k*– коло, то всі перпендикуляри у її точках перетинають площину симетрії по прямій (осі обертання), яка, у свою чергу, перпендикулярна площині кола і проходить через його середину. Як наслідок, точки *O* та *N* збігаються. Але, точка *O* – центр і меридіану, і квадрики обертання. Тому дотичні у її кінцівках (точках *F* та *E*) мають бути паралельними, а точка *S* – невласною. Тобто має бути описаний циліндр.

Якщо обвідний конус – конус обертання, то, як було показано вище, всі похилі перерізи призводять до виродженого варіанта. А саме, моделюється початковий обвідний конус. Якщо задано нормальний переріз (коло), то за наведеним алгоритмом отримуємо сферу. Однак для заданого кола ще існує однопараметрична множина вписаних та описаних квадрик обертання, бо за центр поверхні може бути обрана абсолютно довільна точка *O* на осі *SN*. Тому і існує однопараметрична множина співвісних квадрик, спряжених по заданій паралелі.

Проте не існує двох квадрик обертання спряжених по будь-якому іншому перерізу. Дійсно, дві квадрики спряжені, якщо вони мають спільний вписаний (описаний) конус із заданою лінією контакту. А такий визначає тільки одну поверхню обертання. Натомість будь-яка квадрика обертання по будь-якій лінії контакту може бути спряжена з однопараметричною множиною квадрик загального виду [16].

Результати побудови квадрик обертання за описаним алгоритмом, які представлено на рис.1, *б*, рис. 2, *б*, виконувались у середовищі графічної комп'ютерної системи SolidWorks [17]. Побудова поверхонь відбувалась за сучасною парадигмою геометричного комп'ютерного моделювання. Основна ідея цієї парадигми полягає у тому, що задачі розв'язуються за алгоритмом, кожний крок якого застосовує відповідну операцію графічної системи. Це можна порівняти з тим, що у класичній геометрії розглядається максимальне коло задач, які можуть бути розв'язані за допомогою циркуля та лінійки. Застосування розвинених графічних систем (саме до таких належить SolidWorks) позбавляє науковців та проєктувальників від необхідності виводити рівняння поверхонь і розв'язувати системи нелінійних рівнянь при знаходженні фігур їх перетину.

Моделювання поверхонь, показаних на рис. 1 та рис. 2 передбачає, що відомі вісь та площини симетрії обвідного конуса. Проте у реальних задачах конус займає загальне положення і його площини симетрії невідомі. Методи їх знаходження є у будь-якому підручнику з аналітичної геометрії, але для їх застосування необхідно знати рівняння конуса.

Отже, розв'язок задачі знаходять при вирішенні рівняння третього ступеня, що унеможливлює ефективне використання графічної системи. У роботі [18] запропоновано графічний спосіб визначення площин симетрії, що базується на побудові двох додаткових кривих другого порядку. Їх точки перетину задають напрямок осей системи координат, в якій конус має канонічне рівняння. Детальне вивчення можливостей системи SolidWorks показало, що задача визначення площин симетрії може бути розв'язана за допомогою її внутрішніх алгоритмів. На рис. 4 представлено результат використання цих алгоритмів.

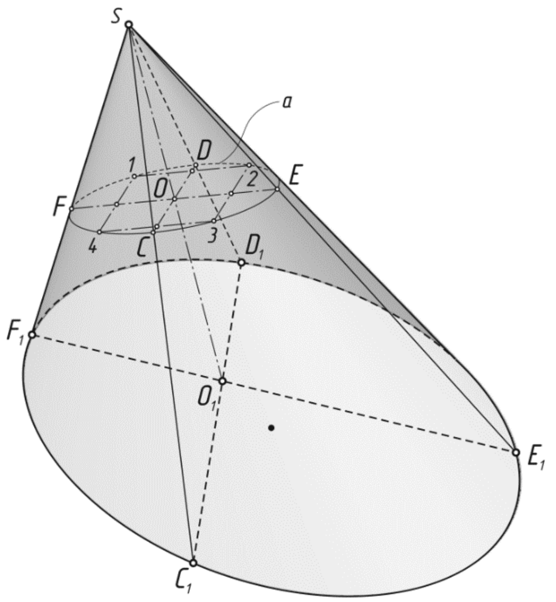


Рисунок 4 – Побудова осі і площин симетрії конуса другого порядку загального вигляду засобами системи SolidWorks

Задача розв'язувалась в три етапи. На першому етапі будували деякий переріз заданого конуса та його два діаметри. Для цього задають чотири точки (кінцівки діаметрів) та декларують необхідні й достатні умови належності, колінеарності, рівності та компланарності. Точка перетину двох діаметрів з'єднується з вершиною конуса. Ця пряма є прообразом осі заданого конуса.

На другому етапі відбувалась побудова безпосередньо осі конуса. Цей етап передбачає використання вбудованої функції системи SolidWorks, яка, залишаючи кінці діаметрів на поверхні конуса, переводить площину цих діаметрів у положення, перпендикулярне положенню прообразу осі. За цих умов пряма, що з'єднує точку перетину діаметрів з вершиною, перетворюється у вісь конуса, а заданий переріз стає нормальним перерізом конуса – еліпсом *a*, із центром у точці *O* (рис. 4).

Третій етап – побудова площин симетрії конуса обертання загального вигляду. На еліпсі *a* задають довільно чотири точки *1, 2, 3, 4*. На ці точки накладається умова (реалізація якої є вбудованою функцією у системі SolidWorks), що ці точки утворюють квадрат, вершини якого належать еліпсу*a*. Такий квадрат може мати тільки одне положення.

Середини протилежних сторін квадрата визначають велику *EF* та малу *CD* осі еліпса *a*. Разом із вершиною *S* ці лінії попарно задають дві площини симетрії, сліди яких на основі конуса загального положення показано лініями E_1F_1та C_1D_1, відповідно. Конус, зображення якого наведено на рис. 4, було взято за основу при поясненні розроблених алгоритмів (рис. 1, 2).

Висновки

1. Запропоновані у роботі алгоритми є складовою частиною загальної схеми технології проєктування поверхонь за їх лініями обрису. На думку авторів, ці алгоритми більш ефективні і зрозумілі у порівнянні з відомими.
2. Наведені приклади є результатом реального моделювання і підтверджують дієздатність запропонованих алгоритмів.
3. Подальший розвиток проведених досліджень може бути реалізованим у напрямах:

– аналітичного аналізу заданої схеми, що дасть змогу визначати положення лінії контакту конуса за заданими умовами проєктування;

– розроблення технології проєктування реальних об'єктів, розрахованої на архітекторів та дизайнерів.

Список літератури

1. Emery, J. Conics, Quadrics and Projective Space (quadric.tex). Last Edit 9/3/2015. 1 – 96. URL: http://www.stem2.org/je/quadric.pdf

2. Ковальов, С. М. Властивості деяких параболоїдів n-го порядку / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська, О.В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2015. № 22. – С.134 – 137.

3. Gfrerrer, A., Zsombor-Murray, P. (2009). Quadrics of Revolution on Given Points. Journal for Geometry and Graphics 13(2), 131–144. Copyright Heldermann Verlag.

4. Zsombor-Murray, P., Fashny, S. (2006). A Cylinder of Revolution on Five Points Journal for Geometry and Graphics 10(2), 207–213. Copyright Heldermann Verlag.

5. Korotkiy, V. A. Construction of a Nine-Point Quadric Surface/ V.A. Korotkiy. Journal for Geometry and Graphics. Copyright Heldermann Verlag. – 2018. Vol. 22, Issue. 2. P. 183–193.

6. Bobenko, A. I., Suris, Yu. B. Discrete differential geometry. Consistency as integrability, arXiv: math. DG0504358. 2005. – 404 pp.

7. Doliwa, A. Quadratic reductions of quadrilateral lattices J. Geom. Phys., 30:2 (1999). P.169 – 186.

8. Монж, Г. Начертательная геометрия. Классики науки. Москва: Книга по требованию. 2013. – 292 с.

9. Rahmann, S. (2003). Reconstruction of Quadrics from Two Polarization Views, Proc. Iberian Pattern Recognition and Image Analysis, P. 810–820. URL: ftp://ftp.informatik.uni-freiburg.de/papers/lmb/ibpria03.pdf

10. Сазонов, К. А., Янковская, Л. С. Компьютерное моделирование сферических поверхностей объектов дизайна на перспективных изображениях. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Технічна естетика і дизайн». Київ: Віпол. 2009. Вип. 6. С. 19 – 26.

11. Сазонов, К. А., Компьютерное формообразование конических и цилиндрических поверхностей на перспективных изображениях по линиям очертания [Текст] / К.А. Сазонов // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія». – Вип. 89. – Київ, КНУБА. 2012. – С. 33 – 38.

12. Anpilogova V. Comprehensive task analysis of design object modeling by outlines of revolution surfaces / V.Anpilogova, K. Sazonov, A. Sulimenko, S. Sulimenko. // Proceedings II International Conference "Innovative Technologies in Science and Education, European Experience" November 12-15, 2018, Helsinki, Finland. – 2018. – С. 220 – 226.

13. Суліменко С. Ю. Аналіз та синтез процесу комп'ютерного моделювання поверхонь обертання за їх лініями обрису. / С. Ю. Суліменко. // Проблеми інформаційних технологій ХНТУ, (22). – 2017. – С. 200–206. ISSN 2313-0687.

14. Суліменко С. Ю. Формоутворення поверхонь обертання другого порядку за їх лініями обрисів / С.Ю. Суліменко, В.О. Анпілогова, Ж.Г. Левіна // Сучасні проблеми архітектури та містобудування. – К., КНУБА. – 2016. – №44. – С. 320 – 325.

15. Моденов, П.С. Аналитическая геометрия. Москва: МГУ. 1969. – 688с.

16. V. Anpilogova, S. Botvinovska, A. Zolotova, H. Sylimenko. (2019) Study of problem on constructing quadrics at the assigned tangent cones. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5/1 (101), 39 – 48. doi:http://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180859

17. https://ru.wikipedia.org/wiki/SolidWorks (date of appeal 29.07.19).

18. Короткий В. А. Формообразование линий и поверхностей на основе кривых второго порядка в компьютерном геометрическом моделировании: автореф. дис… на соискание ученой степени докт. техн. наук : спец. 05.01.01 – «Инженерная геометрия и компьютерная графика». Нижний Новгород, НГАСУ, 2018. – 38 с. [електронний ресурс]. – http://www.nngasu.ru> dissertation_advice> Korotkii> Avtoref_Korotkii/.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.2019

Ботвиновская Светлана Ивановна
Доктор технических наук, доцент, заведующая кафедрой начертательной геометрии и инженерной графики, *orcid.org/0000-0002-1832-1342*
Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев
Васько Сергей Михайлович
Кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры компьютерных технологий и моделирования систем, *orcid.org/0000-0002-6868-861X*
Житомирский национальный агроэкологический университет, Житомир
Сулименко Анна Геннадиевна
Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры компьютерных технологий и моделирования систем, *sorcid.org/0000-0002-2454-1675*
Житомирский национальный агроэкологический университет, Житомир

ОСОБЕННОСТИ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ АРХИТЕКТУРЫ И ДИЗАЙНА, В СОСТАВ КОТОРЫХ ВХОДЯТ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. *Рассмотрена проблема моделирования геометрических фигур с учетом их желаемого очертания на перспективных изображениях. Конкретным объектом исследования являются поверхности вращения второго порядка (квадрики вращения). По заданным обёртывающим конусам второго порядка такие поверхности могут быть построены и при использовании известных алгоритмов, разработанных для произвольных поверхностей вращения. Предложен новый метод, опирающийся на особенности квадрик вращения. В процессе проведения параметрического анализа задачи моделирования рассматривается совокупность: описанный (вписанный) конус второго порядка (далее конус); линия контакта; квадрика вращения. Установлено, что две точки, заданные на поверхности конуса, при условии их принадлежности моделируемой поверхности, задают две квадрики вращения. В рамках данной задачи под линиями контакта понимаем только сечения плоскостями, которые перпендикулярны к плоскостям симметрии конуса. В работе доказана справедливость следующих свойств: перпендикуляры к конусу в точках линии контакта пересекают плоскость* *симметрии конуса в точках, лежащих на одной прямой; линия контакта, заданная на конусе, однозначно определяет вписанную в конус, или описанную вокруг него, квадрику вращения. При этом она однозначно определяет ось квадрики вращения, ее меридиан и центр. На основе этого предложен алгоритм моделирования квадрики вращения по ее линии очертания. Установлены следующие пределы применения этого алгоритма: если линия контакта является окружностью, то квадрика вращения не может быть построена; если конус является конусом вращения, а линия контакта произвольная, то квадрикой вращения будет сам конус. Конус вращения с заданной круговой линией контакта определяет однопараметрическое множество квадрик вращения. Квадрики вращения могут быть сопряжены только тогда, когда они соосны и имеют общую линию контакта – окружность. По любой другой линии контакта две квадрики вращения не могут быть сопряжены.Алгоритмы реализованы в системе SolidWorks. Приведены примеры.*

Ключевые слова: квадрика вращения; линия контакта; линия очертания квадрики; перспективное изображение; сопряжение поверхностей; обертывающий конус

Botvinovska Svitlana
DSc (Eng.), Associate Professor Department of descriptive geometry and engineering graphics, orcid.org/0000-0002-1832-1342
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv
Vasko Sergey
PhD, Senior Lecturer of Computer Technologies and Systems Modeling, orcid.org/0000-0002-6868-861X
Zhytomyr National Agroecological University, Zhytomyr
Sulimenko Hanna
PhD, Associate Professor Department of Computer Technologies and Systems Modeling, orcid.org/0000-0002-2454-1675
Zhytomyr National Agroecological University, Zhytomyr

FEATURES OF COMPUTER MODELING OF OBJECTS ARCHITECTURE AND DESIGN, WHICH INCLUDE SURFACES OF ROTATION OF SECOND ORDER

Abstract. *The problem of modeling geometric figures taking into account their desired outline on perspective images the paper is discusses. The specific subjects of the study are second-order rotation surfaces (rotation quadrics). Such surfaces can be constructed using predetermined second-order wrapping cones using known algorithms developed for arbitrary rotation surfaces. The article proposes a new method based on the features of the rotation quadrics. During the parametric analysis of the simulation task, the collection is considered: the described (inscribed) cone of the second order (hereinafter referred to as the cone); Contact line; A quadric of rotation. It has been found that two points defined on the surface of the cone, provided that they belong to the surface being modeled, define two quadrics of rotation. As part of this task, lines of contact mean only cross sections with planes that are perpendicular to the planes of symmetry of the cone. In the work, the following properties are proved: perpendicular to the cone at points of the contact line intersect the plane of symmetry of the cone at points lying on the same line; The line of contact defined on the cone uniquely defines, inscribed in the cone, or described around it the quadric of rotation. At the same time it uniquely defines the axis of the quadric of rotation, its meridian and the center. Based on this, an algorithm for modeling a rotation quadric along its outline line is proposed. The limits of this algorithm are as follows: if the contact line is a circle, then the quadric of rotation cannot be built; if the cone is the cone of rotation and the contact line is arbitrary, then the quadric of rotation will be the cone itself. A cone of rotation with a predetermined circular line of contact defines a one-parametrical set quadrics of rotation. Rotation quadrics can only be conjugated when they are coaxial and share a common contact line - circle. On any other line of contact, two quadrics of rotation cannot be conjugated. Algorithms are implemented in the SolidWorks system. Examples are given.*

Keywords: Quadric of rotation; Contact line; Line of a contour of a quadric; perspective image; the interfaced surfaces; tangent cone

References

1. Emery, J. Conics, Quadrics and Projective Space (quadric.tex). Last Edit 9/3/2015. 1 – 96. URL: http://www.stem2.org/je/quadric.pdf

2. Botvinovska, S., Kovalev S. & Mostovenko, O. (2015). Some properties paraboloids n-th order. Management of Development of Complex Systems, 22, 134 – 137.

3. Gfrerrer, A., Zsombor-Murray, P. (2009). Quadrics of Revolution on Given Points. Journal for Geometry and Graphics 13(2), 131 – 144.

4. Zsombor-Murray, P., Fashny, S., (2006). A Cylinder of Revolution on Five Points Journal for Geometry and Graphics 10(2), 207 – 213.

5. Korotkiy, V.A. (2018). Construction of a Nine-Point Quadric Surface. Journal for Geometry and Graphics, 22, 2, 183 – 193.

6. Bobenko, A.I., Suris, Yu.B. (2005). Discrete differential geometry. Consistency as integrability, arXiv: math. DG0504358, 404.

7. Doliwa, A. (1999). Quadratic reductions of quadrilateral lattices J. Geom. Phys., 30:2, 169 – 186.

8. Monge, G. (2013). Descriptive geometry. Classics of science. Moscow: Book on demand, 292 p.

9. Rahmann, S. (2003). Reconstruction of Quadrics from Two Polarization Views, Proc. Iberian Pattern Recognition and Image Analysis, 810 – 820. URL: ftp://ftp.informatik.uni-freiburg.de/papers/lmb/ibpria03.pdf

10. Sazonov, K., Yankovskaya, L. (2009). Computer modeling of spherical surfaces of design objects in perspective images. Interdepartmental Scientific and Technical Collection «Technical Aesthetics and Design», 6, 19 – 26.

11. Sazonov, K. (2012). Computer shaping of conical and cylindrical surfaces on perspective images along outline lines. Interdepartmental Scientific and Technical Collection «Applied geometry ». Kyiv, KNUCA, 89, 33 – 38.

12. Anpilogova, V. (2018). Comprehensive task analysis of design object modeling by outlines of revolution surfaces / V.Anpilogova, K. Sazonov, A. Sulimenko, S. Sulimenko. // Proceedings II International Conference "Innovative Technologies in Science and Education, European Experience" November 12-15, 2018, Helsinki, Finland, pp. 220 – 226.

13. Sulimenko, S.Ju. (2017). Analysis and synthesis process computer modeling of surface rotation of lines outline.The problems of information technologies, Official site of Kherson National Technical University (KNTU), 22, 200–206. ISSN 2313-0687.

14. Sulimenko, S.Ju. (2016). Formation of surfaces of the second order of rotation along their lines of outlines. Modern problems of architecture and urban planning. Kyiv: KNUBA, 44, 320 – 325.

15. Modenov, P. (1969). Analytical geometry. Moscow: Moscow State University named after MV Lomonosov (MSU). 688.

16. Anpilogova, V., Botvinovska, S., Zolotova, A., Sylimenko, H. (2019). Study of problem on constructing quadrics at the assigned tangent cones. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5/1 (101), 39 – 48. doi:http://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180859

17. https://ru.wikipedia.org/wiki/SolidWorks (date of appeal 29.07.19).

18. Korotkii, V. (2018). Shaping by lines and surfaces on the basis of the second order curves in computer geometric modeling. PhD thesis: special. 05.01.01 - Engineering geometry and computer graphics. Nizhny Novgorod, (NGASU), 38. [electronic sours]. – http://www.nngasu.ru> dissertation_advice> Korotkii> Avtoref_Korotkii/.

Посилання на публікацію

APA *Botvinovska, Svitlana, Vasco, Sergey & Sulimenko, Hanna. (2019). Features of computer modeling of objects architecture and design, which include surfaces of rotation of second order. Management of Development of Complex Systems, 40, 102 – 111; dx.doi.org\10.6084/m9.figshare.11969049.*

ДСТУ *Ботвіновська С.І. Особливості комп'ютерного моделювання об'єктів архітектури та дизайну, до складу яких входять поверхні обертання другого порядку [Текст] / С.І. Ботвіновська, С.М. Васько, Г.Г. Суліменко // Управління розвитком складних систем. – 2019. – № 40. – С. 102 – 111; dx.doi.org\10.6084/m9.figshare.11969049.*