

DOI: 10.6084/m9.figshare.11969061

УДК 514.182

**Мостовенко Олександр Володимирович**

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки, [orcid.org/0000-0002-3423-4126](https://orcid.org/0000-0002-3423-4126)

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**ІЗОЛІНІЇ РІВНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ПОЛЯ НА ПЛОЩИНІ**

***Анотація.** Запропоновано геометричну модель фізичного поля, що породжується точковими джерелами енергії, з урахуванням впливу відстаней від точки поля до точкових джерел енергії на потенціали точок поля. Цей вплив залежить як від параметрів виду енергії, так і від параметрів середовища, де виникає фізичне поле. При цьому геометричною моделлю фізичного поля є чотиривимірний багатовид, де до трьох координат тривимірного простору додається четверта координата у вигляді потенціалу енергії кожної точки фізичного поля. Для наочності такий багатовид можна розширювати на однопараметричну множину ізоповерхонь рівних потенціалів. Площинним аналогом ізоповерхні є ізолінія фізичного поля на площині з заданими джерелами енергії у цій площині. Визначено, що при одному джерелі енергії ізолінією є коло, центром якого є задане джерело. При двох джерелах енергії однакової потужності ізолінією фізичного поля на площині є еліпс з фокусами в заданих джерелах енергії. При числі джерел енергії  $n > 2$  ізолініями поля є криві, які є узагальненням поняття еліпс з числом фокусів більше двох.*

***Ключові слова:** ізолінія; геометрична модель; фізичне поле; джерело енергії; багатовид; площина; точка; відстань; вплив; геометричний апарат; крива*

**Постановка проблеми**

На сучасному етапі розвитку архітектури і будівництва в Україні особливого значення набувають задачі енергозаощадження. Такі задачі виникають при проектуванні опалення приміщень, штучного освітлення. Задачами іншого типу є задачі, що пов'язані з розповсюдженням звукової енергії.

Комплекс таких задач можна розв'язувати на основі геометричного моделювання фізичних полів.

У роботі пропонується визначити ізолінії рівних потенціалів фізичного поля на площині, яке породжується точковими джерелами енергії, що належать цій площині.

**Мета статті**

Метою статті є визначення ізоліній фізичного поля на площині, яке породжується точковими джерелами енергії, що належать цій площині.

Наочно продемонструвати, що при одному джерелі енергії ізолінією є коло, центром якого є задане джерело. При двох джерелах енергії однакової потужності ізолінією фізичного поля на площині є еліпс з фокусами в заданих джерелах енергії. При числі джерел енергії  $n > 2$  ізолініями поля є криві, які є узагальненням поняття еліпс з числом фокусів більше двох.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій**

Геометричне моделювання фізичних полів на основі методів інтерполяції висвітлено в роботах [1; 2].

Авторами робіт [1; 2] було запропоновано у своїй кандидатській дисертації та докторській відповідно визначення потенціалів фізичного поля у точках двовимірного та тривимірного простору при заданих джерелах енергії. Також з літератури відомі роботи щодо визначення світлової, звукової, теплової енергії.

У відомій літературі з геометричного моделювання процесів відсутні роботи, що пов'язані зі ступенем віддаленості джерел енергії від точок фізичного поля, а також не розглянуто узагальнення поняття еліпс та еліпсоїд з числом фокусів більше двох.

У статті [3] запропоновано геометричний апарат для визначення впливу відстаней від точок поля до точкових джерел енергії і проаналізовано його окремі випадки.

**Виклад основного матеріалу**

Однією із задач геометричного моделювання фізичних полів, що породжуються точковими джерелами енергії, є врахування впливу відстаней від точки поля до точкових джерел енергії на потенціали точок поля [3]. Цей вплив залежить як від параметрів

виду енергії, так і від параметрів середи, де виникає фізичне поле. При цьому геометричною моделлю фізичного поля є чотиривимірний багатовид, де до трьох координат тривимірного простору додається четверта координата у вигляді потенціалу енергії кожної точки фізичного поля.

Для наочності такий багатовид можна розшарувати на однопараметричну множину ізоперхонь рівних потенціалів. Площинним аналогом ізоперхні є ізолінія фізичного поля на площині з заданими джерелами енергії у цій площині.

У статті [3] було запропоновано різні геометричні моделі визначення параметра  $t$ , який враховує вплив відстаней від точкових джерел енергії до точок фізичного поля, у тому числі, модель із обмеженням таких відстаней величиною  $l_{max}$ , при якій цей вплив практично нівелюється:

$$t = \frac{f(l_{max}) - f(l_i)}{f(l_{max})}, \quad (1)$$

де  $l_i$  – відстань від довільної точки фізичного поля до  $i^{\text{го}}$  джерела енергії.

У найпростішому випадку  $f(l_i) = l_i$ , а точкові джерела енергії можуть бути однаковими за потужністю.

У цьому випадку потенціал довільної точки поля можна підрахувати за формулою:

$$U = n \cdot U' - \frac{U' \cdot \sum_{i=1}^n l_i}{l_{max}}, \quad (2)$$

де  $U'$  – потужність кожного з точкових джерел енергії;  $n$  – число точкових джерел енергії;  $i$  – номер точкового джерела енергії.

Параметри  $n, U', l_{max}$  є величинами сталими. Параметр  $U$  для даної ізолінії є також сталою величиною.

Вважаючи у виразі (2)  $(n - \frac{U}{U'}) l_{max} = a$ , отримаємо:

$$\sum_{i=1}^n l_i = a, \quad (3)$$

де  $a$  – стала величина.

При одному джерелі енергії формула (3) описує коло радіуса  $a^2$ . При двох джерелах енергії формула (3) описує еліпс з фокусами, які є двома джерелами енергії:

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = a,$$

де  $a$  – довжина більшої осі еліпса.

При  $n > 2$  отримаємо плоскі криві, які можна вважати узагальненням поняття еліпс з числом фокусів більше двох.

Така крива аналітично описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}; \\ l_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}; \\ &\dots\dots\dots \\ l_n &= \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}; \\ l_1 + l_2 + \dots + l_n &= a. \end{aligned} \quad (4)$$

При виключенні в (4) параметрів  $l_1, l_2, \dots, l_n$  отримаємо рівняння плоскої кривої, яка є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до  $n$  заданих точок (фокусів) є величиною сталою, що дорівнює  $a$ :

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} + \\ &+ \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} + \dots + \\ &+ \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2} = a \end{aligned} \quad (5)$$

*Приклад 1.*

Побудувати криву, яка є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до трьох заданих точок (фокусів)  $O(x=0; y=0)$ ,  $A(x=3; y=0)$ ,  $B(x=-3; y=0)$  є величиною сталою  $a=10$ .

Рівняння (5) у такому випадку у полярних координатах набуває вигляд:

$$\begin{aligned} \rho + \sqrt{(\rho \cdot \cos \alpha - 3)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} + \\ + \sqrt{(\rho \cdot \cos \alpha + 3)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} - 10 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Внаслідок симетрії вихідних даних крива (6) є симетричною відносно осей  $Ox$  і  $Oy$ . Тому у табл. 1 наведені полярні координати для четвертої частини кривої.

**Таблиця 1 – Полярні координати кривої з трьома фокусами**

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho$	3,333	2,97	2,62	2,43	2,363

За даними табл. 1 на рис. 1 побудовано криву (6).

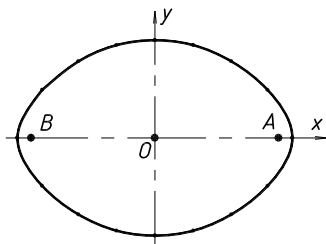


Рисунок 1 – Крива, яка є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до трьох заданих точок, є величиною сталою

**Приклад 2**

Побудувати криву, яка є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до чотирьох заданих точок (фокусів)  $O(x = 0; y = 0)$ ,  $A(x = 3; y = 0)$ ,  $B(x = 0; y = 2)$ ,  $C(x = -3; y = 0)$  є величиною сталою  $a = 12$ .

При вищезазначених вихідних даних рівняння кривої (5) у полярних координатах набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\rho + \sqrt{(\rho \cdot \cos \alpha - 3)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} + \\ &+ \sqrt{(\rho^2 \cdot \cos^2 \alpha + (\rho \sin \alpha - 2)^2} + \\ &+ \sqrt{(\rho \cdot \cos \alpha + 3)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} - 12 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Результати розрахунків полярних координат для половини кривої, яка симетрична відносно осі Oy, наведені в табл. 2.

Таблиця 2 – Полярні координати кривої з трьома фокусами

$\alpha$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0
$\rho$	1,60	1,66	1,88	2,17	2,67
$\alpha$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	
$\rho$	2,66	2,67	2,78	2,86	

Криву (7) показано на рис. 2.

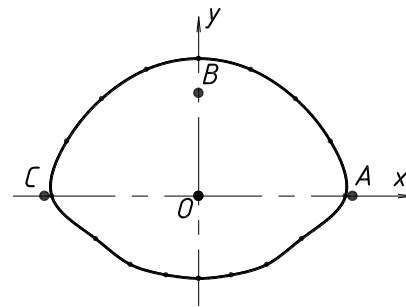


Рисунок 2 – Крива, яка є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до чотирьох заданих точок є величиною сталою

**Висновки**

Тривимірне фізичне поле на площині з точковими джерелами енергії, що належать цій площині, наочно може бути представлено у вигляді однопараметричної множини ізоліній, кожна з яких має заданий потенціал  $U$ . Якщо на відстані від точок поля до точкових джерел енергії накладено обмеження  $l_{max}, f(l_i) = l_i$  та при точкових джерелах енергії однакової потужності ізолінія фізичного поля є геометричним місцем точок, сума відстаней від яких до джерел енергії є величиною сталою.

При одному джерелі енергії ізолінією є коло, центром якого є задане джерело. При двох джерелах енергії однакової потужності ізолінією фізичного поля на площині є еліпс з фокусами в заданих джерелах енергії. При числі джерел енергії  $n > 2$  ізолініями поля є криві, які є узагальненням поняття еліпс з числом фокусів більше двох.

**Список літератури**

1. Скочко В. І. Спеціальні геометричні моделі процесів, що розвиваються в суцільному середовищі / В.І. Скочко / Дис...к. техн. наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2012. – 269 с.
2. Сергейчук О.В. Геометричне моделювання фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків. Дис...д. техн. наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2008. 425 с.
3. Ковальов С.М. Вплив відстаней між точками інтерполянта та заданими точками на його форму [Текст] / С.М. Ковальов, О.В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2019. – №37. – С. 78 – 82.
4. Ковальов С.М. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1 / С.М. Ковальов, М.С. Гумен, С.І. Пустьольга, В.Є. Михайленко, І.Н. Бурчак. – Луцьк: ЛДТУ, 2006. – 256 с.
5. Скочко В.І. Підвищення енергоефективності процесу сушіння будівельних виробів на основі його геометричних моделей // Енергозбереження в будівництві та архітектурі: наук. – техн. зб. – Вип. 1. – К.: КНУБА, 2011. – С. 126 – 131.
6. Болгарова Н.М. Моделювання теплообміну енергоефективної будівлі / Н.М. Болгарова, В.О. Плоский, В.І. Скочко // Енергоефективність в будівництві та архітектурі: наук. – техн. зб. – Вип. 11. – К.: КНУБА, 2018. – С. 7 – 21.
7. Мостовенко О.В. Порівняльний аналіз графіків потенціалів енергії при різних функціях від відстані [Текст] / О.В. Мостовенко // Сучасні проблеми архітектури та містобудування: наук.-техн. збірник – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 53. – С. 297 – 304.
8. Ковалёв С.Н. Интерполяция точек на плоскости с учётом коэффициентов влияния заданных точек / С.Н. Ковалёв, А.В. Мостовенко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. – Вип. 13. – С. 69-75.
9. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М. Наука, 1981. – 344 с.
10. Энциклопедия элементарной математики. Книга V. Геометрия / Гос. изд. технико-теоретической литературы: М. – Л., 1962. – 458 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.2019

**Мостовенко Александр Владимирович**

Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры начертательной геометрии и инженерной графики,  
orcid.org/0000-0002-3423-4126

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев

### ИЗОЛИНИИ РАВНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

**Аннотация.** Предложена геометрическая модель физического поля, порождаемого точечными источниками энергии, с учетом влияния расстояний от точки поля до точечных источников энергии на потенциалы точек поля. Это влияние зависит как от параметров вида энергии, так и от параметров среды, где возникает физическое поле. При этом геометрической моделью физического поля является четырехмерное многообразие, где к трем координатам трехмерного пространства добавляется четвертая координата в виде потенциала энергии каждой точки физического поля. Для наглядности такое многообразие можно расплотить на однопараметрические множества изоповерхностей равных потенциалов. Плоскостным аналогом изоповерхности является изолиния физического поля на плоскости с заданными источниками энергии в этой плоскости. Определено, что при одном источнике энергии изолинией является окружность, центром которой является заданный источник. При двух источниках энергии одинаковой мощности изолинией физического поля на плоскости является эллипс с фокусами в заданных источниках энергии. При числе источников энергии больше двух изолиниями поля будут кривые, которые являются обобщением понятия эллипс с числом фокусов больше двух.

**Mostovenko O.**

PhD (Eng.), lecturer of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics, orcid.org/0000-0002-3423-4126  
Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

### ISOLINES OF EQUAL POTENTIALS OF THE ENERGY FIELD ON THE PLANE

In this study, a geometric model of the physical field generated by point sources of energy is proposed, taking into account the influence of distances from the point of the field to point sources of energy on the potentials of the points of the field. This influence depends both on the parameters of the type of energy and on the parameters of the medium where the physical field arises. In this case, the geometric model of the physical field is a four-dimensional manifold, where the fourth coordinate is added to the three coordinates of the three-dimensional space in the form of the energy potential of each point of the physical field. For clarity, such a manifold can be stratified into one-parameter sets of isosurfaces of equal potentials. The plane analog of the isosurface is the isoline of the physical field on the plane with the given energy sources in this plane. It is determined that for one energy source, the isoline is a circle whose center is a given source. For two energy sources of the same power, the isoline of the physical field on the plane is an ellipse with foci in the given energy sources. With the number of energy sources more than two, the field isolines are curves, which are a generalization of the concept of an ellipse with the number of foci more than two.

#### References

1. Skochko, V.I. (2012). *Special geometrical models of processes, which are developed in such a medium. PhD thesis: 05.01.01. K.: KNUBA, 269.*
2. Sergeychuk, O.V. (2008). *Geometric modeling of physical processes in optimizing the form of energy-efficient buildings. DSc thesis: 05.01.01. K.: KNUBA, 425.*
3. Kovalev, S.N., & Mostovenko, A.V. (2019). *Effects of distances between interpolant points and set points on the interpolant. Management of Development of Complex Systems, 37, 78 – 82.*
4. Skochko, V.I. (2011). *Energy efficiency of the process of drying of viruses on the basis of new geometric models. Energy saving in construction and architecture, 1, 126 – 131.*
5. Bolgarova, N.M., Ploskiy, V.O., & Skochko, V.I. (2018). *Modeling of Heat Transfer of an Energy Efficient Building. Energy efficiency in construction and architecture, 11, 7 – 21*
6. Bergren, C.A. (1975). *Do Parabolic Interpolation With Less Memory. Control Engineering, 22 (5), 44 – 45.*
7. Kovalov, S.M., Gumen, M.S., Pustyulga, S.I., & Mikhaylenko, V.E. (2006). *Applied Geometry and Engineering Graphic. Special offers, 1, 256.*
8. Kovalev, S.N., & Mostovenko, A.V. (2018). *Interpolation of points on a plane taking into account coefficients of influence of given points. Modern problems of modeling: Sb. sciences works. Melitopol: MDPU Publishing House. B. Khmelnytsky, 13, 69 – 75.*
9. Gilbert, D., Kon-Fossen, S. (1981). *Visual geometry. M. Nauka, 344.*

#### Посилання на публікацію

- APA Mostovenko, Oleksandr. (2019). *Isolines of equal potentials of the energy field on the plane. Management of Development of Complex Systems, 40, 125 – 128; dx.doi.org/10.6084/m9.figshare.11969061.*
- ДСТУ Мостовенко О.В. *Ізолінії рівних потенціалів енергетичного поля на площині [Текст] / О.В. Мостовенко // Управління розвитком складних систем. – 2019. – №40. – С. 125 – 128; dx.doi.org/10.6084/m9.figshare.11969061.*