

**Ковальов Сергій Миколайович**

Доктор технічних наук, професор кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки,

<https://orcid.org/0000-0002-1367-1730>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Ботвіновська Світлана Іванівна**

Докторка технічних наук, доцентка, завідувачка кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки,

<https://orcid.org/0000-0002-1832-1342>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**Колган Анна Володимирівна**

Аспірантка, асистентка кафедри нарисної геометрії та інженерної графіки,

<https://orcid.org/0000-0002-2167-2864>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БЕЗМОМЕНТНОЇ ОБОЛОНКИ ЗАДАНОЇ ФОРМИ

**Анотація.** У сучасному будівництві й архітектурному проектуванні дедалі більшої актуальності набувають підходи, спрямовані на оптимізацію конструкцій для зменшення витрат матеріалів без втрати міцності, естетичності та функціональності. Одним із таких підходів є статико-геометричний метод моделювання, який дає змогу проектувати безмоментні оболонки, що вирізняються відсутністю згинальних моментів під дією власної ваги. Основна мета пропонованого дослідження полягала у створенні ефективної методики проектування оболонкових конструкцій із мінімальним використанням матеріалів та забезпеченням їхньої стійкості. У рамках роботи представлено підхід використання дискретних моделей, що апроксимуються площинами. Також представлено алгоритм розрахунку деяких параметрів безмоментних оболонок: координати вузлів дискретної сітки, площі поверхні та зусиль у вузлах. Особливу увагу приділено визначенню оптимальної товщини елементів оболонок, яка забезпечує їхню рівновагу та стійкість до зовнішніх впливів. Для перевірки ефективності методу проведено моделювання оболонок сферичної форми та параболоїда обертання. Використання розробленої методики уможливорює врахувати геометричні особливості та взаємодію елементів конструкції. Результати моделювання демонструють, що запропонований підхід є наочним і є зручним для практичного застосування у сфері будівництва. Виконані розрахунки підтверджують можливість точного визначення параметрів конструкцій та їхньої оптимальної форми для мінімізації матеріальних витрат за рахунок більш точного підбору товщини оболонки. На основі проведених досліджень зроблено висновок, що статико-геометричний метод моделювання має значний потенціал для впровадження в архітектурне проектування і будівництво. Запропонована методика може бути використана для створення легких, економічно вигідних і екологічно безпечних оболонкових конструкцій. Розроблені підходи відкривають нові перспективи для використання безмоментних оболонок у широкому спектрі інженерних задач.

**Ключові слова:** дискретні сітки; безмоментні оболонки; статико-геометричний метод (СГМ); геометричне моделювання; архітектурні об'єкти

### Постановка проблеми

У процесі розроблення та реалізації архітектурних проєктів особливу увагу слід приділяти раціональному й екологічному використанню матеріалів. Для визначення оптимальної форми та товщини конструкцій широко застосовуються чисельні методи проектування, зокрема методи дискретної геометрії. Вони дають

змогу виконувати точні розрахунки оболонок, у яких відсутні згинальні моменти, що забезпечує оптимальну товщину конструкцій. Це сприяє значному зменшенню обсягу будівельних матеріалів, необхідних для створення несучих елементів споруд. Крім того, під час реконструкції будівель і споруд, коли у придатному стані зберігається лише опорний контур – наземна або підземна частина, виникає необхідність у визначенні оптимальної форми

конструкції. Техніка дискретної геометрії допомагає розв'язувати цю задачу, оскільки розрахунковий каркас може бути використаний безпосередньо як основа для нової, тимчасової або постійної споруди. Це забезпечує ефективність процесу реконструкції, знижуючи витрати ресурсів і часу.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Дискретне формотворення поверхонь на основі статико-геометричного методу (СГМ), що має схожий з методом скінчених різниць математичний апарат, було започатковане професором С. М. Ковальовим [1]. Науковці Київської школи продовжили розвиток СГМ для створення дискретних геометричних образів, ґрунтуючись на розв'язанні систем лінійних рівнянь, які визначають координати вузлів сітки. У дослідженнях [8; 12] були представлені алгоритми та методи моделювання дискретних оболонок, проте питання визначення товщини оболонок у кожному вузлі дискретної сітки залишалось поза увагою авторів. Питання розподілу зовнішнього навантаження при дискретному геометричному моделюванні поверхонь розглядалися в роботі [3] А. В. Золотової. Автор приділяє увагу формуванню дискретних каркасів поверхонь під дією вертикального формоутворюючого навантаження, СГМ описує зв'язок між рівнянням безперервної поверхні та дискретною функцією розподілу навантаження між вузлами сітки. Однак за топологічними схемами розглядалися лише сітки з прямокутними або квадратними клітинами. Систематизація упорядкованих дискретних плоских сіток, метричні та статичні властивостям їх форми було розглянуто в роботі [4]. Автор наводить нові системи призначення нумерації вузлів, що впливає на зручність використання СГМ для різних топологічних схем.

Дослідженням процесу формотворення двовимірних геометричних образів на основі методу суперпозицій було присвячено роботу [5]. У роботах [6; 7] описано задачу побудови дискретних каркасів шляхом використання дискретної параболічної інтерполяції, зокрема сформовано двовимірні геометричні образи у вигляді дискретних каркасів гіперболічних кривих, через задані вузлові точки. Автор демонструє розширення можливостей СГМ шляхом використання методу суперпозицій для моделювання геометричної форми оболонок.

У роботі [9] вчених Мелітопольської школи застосовується дискретне геометричне моделювання (ДГМ), основними напрямками якого є інтерполяція, апроксимація та загушення дискретних сіток. Використання способу загушення сіток уможливило підвищити точність розрахунків, постійно уточнювати її геометричну форму, проте автори не

розглядають задачі знаходження товщини оболонки у вузлах сітки.

На основі синтезу дискретних формоутворюючих властивостей класичного методу скінчених різниць, СГМ та геометричної інтерпретації математичного апарату числових послідовностей було створено нову теорію дискретного формування геометричних образів професором С. І. Пустюльгою, Луцької школи [10]. У роботі [11] автори описують процес формування відсіків зрівноважених дискретно представлених криволінійних поверхонь із трикутним планом. Використаний ними математичний апарат суперпозиції подвійних числових послідовностей дає змогу спростити розрахунки та уникнути розв'язання складних систем лінійних рівнянь, що є недоліком СГМ.

Однак при моделюванні архітектурних оболонок все ще залишаються питання вибору топологічних схем сіток і нумерації вузлів для дискретних каркасів оболонок із заданими опорними контурами та на планах довільної форми. Аналіз останніх досліджень і публікацій довів необхідність проведення досліджень щодо оцінки товщини безмоментних оболонок, оскільки питання оптимального використання матеріалів, розрахунку витрат конструктивного матеріалу й естетичної виразності форми завжди залишаються актуальними.

### Мета статті

Мета роботи полягає у використанні СГМ для моделювання безмоментних оболонок, що забезпечують плавний розподіл ваги конструкції без виникнення згинальних моментів. Ціллю дослідження є розроблення алгоритму для визначення товщини архітектурних оболонок, представлених дискретним каркасом, та наведення розрахункових формул. У роботі розглянуто приклади застосування СГМ для розрахунку товщини сферичних оболонок і поверхонь параболоїдів, представлених різними топологічними схемами з урахуванням їх форми та власної ваги матеріалу.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Оболонка вважається безмоментною, якщо в ній під дією власної ваги не виникає згинальних моментів. Для того щоб визначити сили власної ваги оболонки, які формують поверхню, її можна “задати” у дискретному вигляді. Для цього на горизонтальній проекції поверхні задається дискретна координатна сітка  $(x_i; y_j)$  з одиничним кроком нумерації  $(i; j)$  вузлів (рис. 1). За аналітичним рівнянням поверхні оболонки  $z = f(x, y)$  знаходять аплікати  $Z_{i,j}$  вузлів

$(x_i; y_j)$  дискретної сітки поверхні і за формулою

$$KP_{i,j} = Z_{i-1,j} + Z_{i+1,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1} - 4Z_{i,j} \quad (1)$$

визначають зусилля зовнішнього навантаження на ці вузли [1].

На кожний вузол сітки діє власна вага оболонки, що пропорційна чверті сумарної площі чотирьох клітин [2], яким належить цей вузол (рис. 2, б).

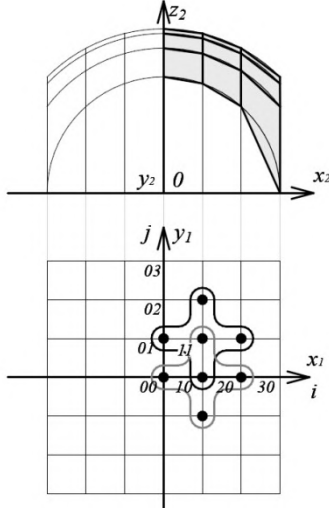


Рисунок 1 – Зовнішній вигляд і топологічна схема з одиничним кроком

Для розрахунку площі, якій буде пропорційна вага поверхні, що «збирається» на вузол, використовується формула:

$$S'_{i,j} = \frac{S'_{i-1,j-1} + S'_{i-1,j} + S'_{i,j-1} + S'_{i,j}}{4}, \quad (2)$$

де  $S'_{i,j}$  – площа поверхні, з якої збирається навантаження на вузол дискретної сітки.

Розрахунок цієї площі поверхні  $S'_{i,j}$  буде проводитись через її проекцію на площину топологічної схеми. Для спрощення розрахунків, кожен вузол дискретної сітки апроксимуємо площиною  $\Gamma$  (рис. 3). Пропонується, щоб площина проходила через середини сторін сітки, що утворена

вузлами аплікату  $Z_{i,j}$ , знайденими та накладеними на поверхню оболонки. Середини сторін клітини (точки  $G, F, E, H$ ) належать площині  $\Gamma$ .

Кожна клітина сітки аплікату  $Z_{i,j}$  з вузлами у точках  $A, B, C, D$  та її горизонтальна проекція ( $A_1, B_1, C_1, D_1$ ) вершин вузлів  $(x_i; y_j)$  в площині  $XOY$  утворюють зрізану призму з квадратною основою (рис. 3). Можна вважати, що площа зрізу  $A'B'C'D'$  цієї призми, площиною  $\Gamma$ , наближено дорівнює площі клітини сітки, нанесеної на оболонку (див. рис.1, 2, 3). Оцінювання величини площі, якій належить вузол аплікату  $Z_{i,j}$ , можна зробити по площі клітини, якій належить вузол  $(x_i; y_j)$  в площині  $XOY$  топологічної схеми, за формулою:

$$S'_{i,j} = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot S_{i,j}, \quad (3)$$

де  $S'_{i,j}$  – площа клітини на поверхні оболонки апроксимована площиною  $\Gamma$ ;  $S_{i,j}$  – площа клітини сітки топологічної схеми.

Тому для розрахунку величини цієї площі потрібно знати кут між площиною  $\Gamma$  та проекцією клітини на топологічній схемі. Для його знаходження запишемо рівняння площини  $\Gamma$  в просторі.

Запишемо загальне рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4)$$

Визначимо коефіцієнти  $A, B, C$  та  $D$ . Для цього потрібно знати координати мінімум трьох точок, які належать цій площині. Для побудови загального вигляду робочих формул припустимо, що ці три точки (рис. 3) мають координати:  $E (X_E, Y_E, Z_E)$ ,  $F (X_F, Y_F, Z_F)$  і  $G (X_G, Y_G, Z_G)$ . В реальності ці точки є координатами наших вузлів  $(x_i; y_j; z_{i,j})$  на топологічній схемі  $(x_i; y_j)$  і схемі вузлів аплікату  $Z_{i,j}$  на поверхні оболонки.

Складемо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} A \cdot x_E + B \cdot y_E + C \cdot z_E + D = 0; \\ A \cdot x_F + B \cdot y_F + C \cdot z_F + D = 0; \\ A \cdot x_G + B \cdot y_G + C \cdot z_G + D = 0. \end{cases}$$

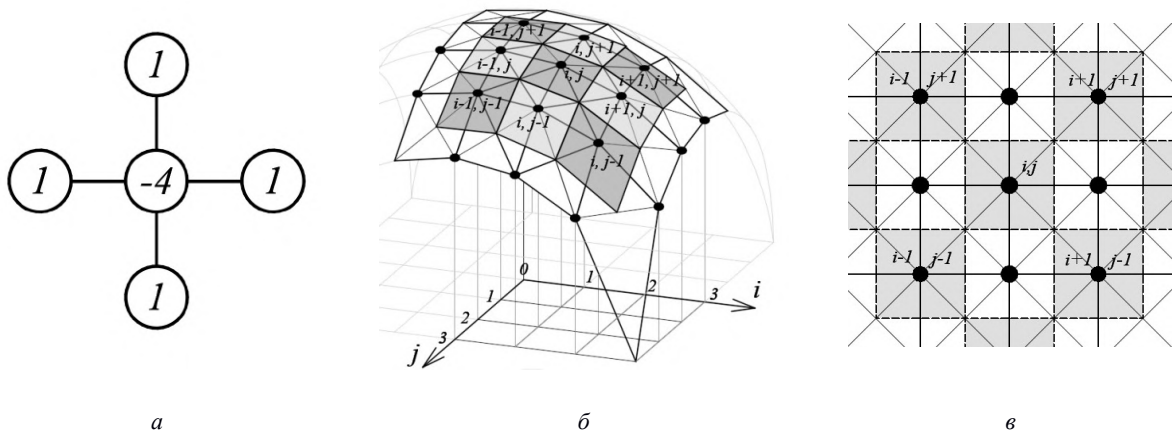


Рисунок 2 – Схема збору навантажень: а – двовимірний шаблон; б – просторова схема збору навантаження на кожний вузол; в – схема збору навантаження на кожний вузол

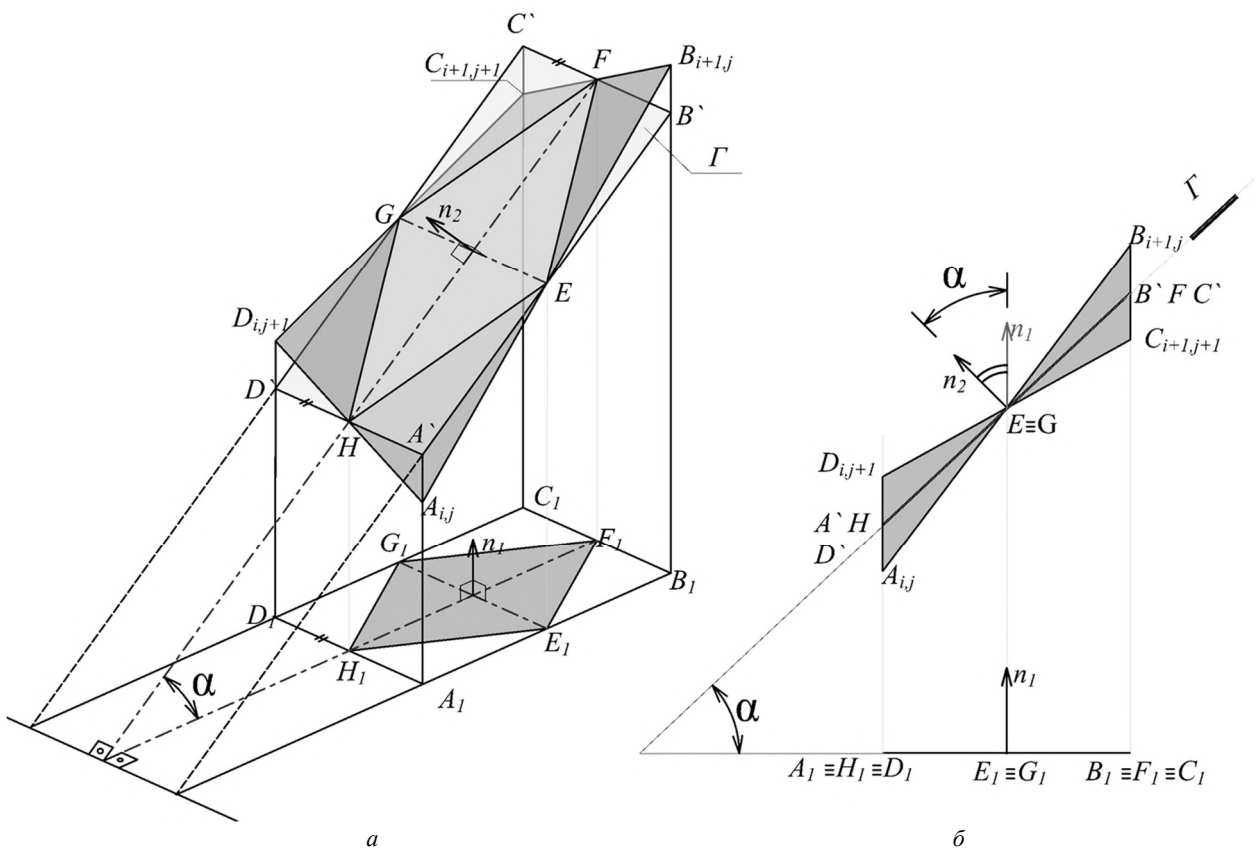


Рисунок 3 – Апроксимація клітини сітки площиною  $\Gamma$ , яка проходить через середини ребер дискретної сітки:  
 а – схематичне зображення площини  $\Gamma$ ; б – проєкція площини  $\Gamma$  на вертикальну площину

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_E & y_E & z_E \\ x_F & y_F & z_F \\ x_G & y_G & z_G \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & y_E & z_E \\ 1 & y_F & z_F \\ 1 & y_G & z_G \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} x_E & 1 & z_E \\ x_F & 1 & z_F \\ x_G & 1 & z_G \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix} \quad (5-8)$$

Перепишемо це рівняння у матричному вигляді і розв’яжемо за методом Крамера:

$$\begin{pmatrix} x_E & y_E & z_E \\ x_F & y_F & z_F \\ x_G & y_G & z_G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = -D \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

У нашому випадку невідомими є коефіцієнти положення  $A, B, C$  та коефіцієнт розміщення площини у просторі  $D$ .

Коефіцієнти  $A, B, C$  визначають за допомогою формул:

$$A = K \cdot \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad B = K \cdot \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad C = K \cdot \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

де  $\Delta; \Delta_x; \Delta_y; \Delta_z$  – визначники матриці, отримані за правилом Крамера (5) – (8);  $K = 1/D$  – коефіцієнт, відповідний за початкове розміщення площини. Розрахунок детермінантів (5) – (8) матриці  $3 \times 3$  виконують через правило Саррюса.

Горизонтальний слід площини  $\Gamma$  (рис. 3, б) отримаємо підстановкою  $Z=0$  до формули (4). Це додаткове рівняння дає змогу визначити коефіцієнт  $K = 1/D$ , відповідний за розміщення та перетин площин у просторі.

Визначені коефіцієнти  $A, B, C$  є координатами вектора нормалі до площини. Кут  $\alpha$  між двома площинами дорівнює куту між нормальними до них. Визначити кут між цими нормальними можна за допомогою скалярного добутку.

- Нормаль  $n_1 = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$  – це вектор нормалі до площини  $H_1G_1F_1E_1$ .

- Нормаль  $n_2 = (n_{2x}, n_{2y}, n_{2z})$  – це вектор нормалі до площини  $HGF E$ .

Скалярний добуток двох векторів визначається за формулами:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = n_{1x}n_{2x} + n_{1y}n_{2y} + n_{1z}n_{2z};$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha.$$

Щоб знайти довжину кожного вектора нормалі, використовуємо їх норму:

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{n_{1x}^2 + n_{1y}^2 + n_{1z}^2}; \quad (9)$$

$$|\vec{n}_2| = \sqrt{n_{2x}^2 + n_{2y}^2 + n_{2z}^2}.$$

Кут  $\alpha$  між двома векторами визначається за допомогою формули:

$$\cos \alpha = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}, \quad (10)$$

$$\alpha = \arccos \left( \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} \right). \quad (11)$$

Знаючи кут  $\alpha$  між площинами клітини оболонки  $\Gamma$  і її горизонтальної проекції, можемо оцінити площу клітини сітки на оболонці по її горизонтальній проекції за формулою (3).

Зусилля в кожному вузлі сітки, крім вузлів на опорному контурі, пропорційне площі, яка визначається як чверть сумарної площі чотирьох клітин, що належать кожному внутрішньому вузлу сітки:

$$kP_{i,j} = \frac{S_{i-1,j} + S_{i+1,j} + S_{i,j} + S_{i,j+1}}{4} \cdot h_{i,j} \cdot \delta, \quad (12)$$

де  $h_{i,j}$  – товщина оболонки у заданому (ум. од. довжини);  $\delta$  – об’ємна вага матеріалу оболонки ((ум.од.сил)/(ум.од.довжини)<sup>3</sup>);  $k$  – коефіцієнт пропорційності зусилля у в’язях до величини в’язей (ум.од.).

Отже, маємо товщину оболонки у цьому вузлі, яка розраховується за формулою:

$$h_{i,j} = \frac{4 kP_{i,j}}{\delta (S_{i-1,j} + S_{i+1,j} + S_{i,j} + S_{i,j+1})}. \quad (13)$$

Оболонка, товщина якої у вузлах відповідає виразу (13), є безмоментною.

Нижче представлено узагальнений алгоритм визначення товщини безмоментної оболонки:

1. Задаємо топологічну схему.
2. Виконуємо дискретизацію поверхні архітектурної оболонки, визначаємо аплікати вузлів сітки за аналітичними рівняннями, що описують цю поверхню.
3. За формулами (5) – (8) визначаємо коефіцієнти множини площини  $\Gamma$ , що апроксимують клітини сітки.
4. За формулою (11) визначаємо кути нахилу апроксимуючих площин до горизонтальної площини.
5. За знайденим кутом за формулою (3) визначаємо величини площ клітин сітки, заданої на оболонці;
6. За знайденими площами за формулою (13) знаходимо товщину оболонки в кожному вузлі сітки.

#### Приклад 1. Оболонка сферичної форми

Для простоти розрахунків обираємо сферичну оболонку. Задано опорний контур на квадратному плані у вигляді чотирьох дуг кіл, апроксимованих ламаною, точки якої належать сферичній поверхні. Топологія сітки представлена на (рис. 4).

Сторона квадрата топологічної схеми дорівнює:

$$x_{max} = y_{max} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Зрозуміло, що ця сторона дорівнює також сумі довжин сторін «одиничних» квадратів, на які цей квадрат був поділений.

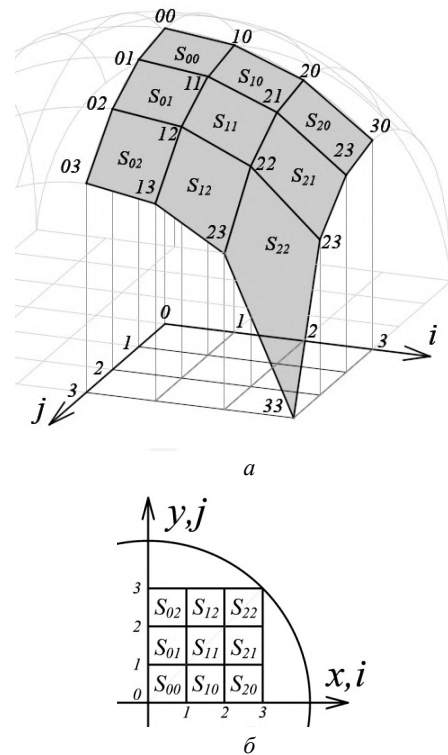


Рисунок 4 – Сферична поверхня, з нанесеною дискретною сіткою: а – вихідна поверхня з опорним контуром; б – топологічна схема дискретної сітки з квадратними клітинами

Для зменшення і спрощення обчислень розрахунки проводяться для 1/4 частини сферичної поверхні, а радіус сферичної поверхні вибрано кратним  $\sqrt{2}$  для того, щоб сторона квадрата була цілим числом. У цьому прикладі  $x_{max} = y_{max} = 3$ , тож  $R = 3\sqrt{2} = 4,2426$ . Сферична поверхня, центр якої збігається з початком системи координат, описується рівнянням:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

У такому випадку апліката будь-якого вузла, що належить додатній частині осі  $Z$ , визначається за формулою:

$$Z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (14)$$

Аплікати всіх вузлів дискретної сітки, накладеної на сферичну поверхню, представлено у табл. 1.

Відповідно до описаного алгоритму розраховуємо значення зовнішніх зусиль  $kP_{i,j}$  в кожному вузлі дискретної сітки.

Таблиця 1 – Аплікати точок сферичної поверхні з квадратною сіткою (ум. од.)

$j=3$	3	2,828	2,236	0
$j=2$	3,742	3,606	3,162	2,236
$j=1$	4,123	4	3,606	2,828
$j=0$	4,243	4,123	3,742	3
	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$

Наведемо аналітичне рівняння сферичної поверхні оболонки у вигляді кінцевих різниць та розрахункові вирази для знаходження  $kP_{i,j}$ :

$$Z_{i,j} = \frac{Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1} + Z_{i+1,j}}{4} + kP_{i,j} \rightarrow$$

$$kP_{i,j} = Z_{i,j} - \frac{Z_{i-1,j} + Z_{i,j-1} + Z_{i,j+1} + Z_{i+1,j}}{4} \rightarrow$$

$$kP_{i,j} = \frac{4Z_{i,j} - Z_{i-1,j} - Z_{i,j-1} - Z_{i,j+1} - Z_{i+1,j}}{4} \rightarrow$$

Тут була використана оцінка величини навантаження за принципом різниці висот сусідніх вузлів по відношенню до центрально-зваженого вузла сітки. По суті навантаження оцінювалось як проекція одиничного вектора сили на вісь Z, прикладеної до площин, зазначених у формулі (2). Результати розрахунків наведено у табл. 2.

Таблиця 2 – Зовнішнє навантаження  $kP_{i,j}$  на вузли сферичної поверхні (ум.од.)

$j=2$	0,158	0,172	0,241
$j=1$	0,127	0,136	0,172
$j=0$	0,12	0,127	0,158
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

За формулами (2) та (3) розраховуємо площі клітин оболонки, з яких збираємо навантаження на кожний вузол дискретної сітки. Результати розрахунку представлено в табл. 3.

Таблиця 3 – Сумарна площа  $S$  четвертин клітин оболонки навколо точок (ум. од.)

$j=2$	1,166	1,215	1,424
$j=1$	1,046	1,081	1,215
$j=0$	1,014	1,046	1,166
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

Таблиця 4 – Товщина оболонки  $h$  у вузлах сферичної поверхні (ум. од.)

$j=2$	0,136	0,142	0,170
$j=1$	0,121	0,136	0,142
$j=0$	0,118	0,121	0,136
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

За формулою (13) розраховуємо товщину сферичної оболонки в кожному вузлі дискретної сітки. Результати розрахунків представлено в табл. 4.

**Приклад 2. Оболонка у вигляді параболоїда обернання**

Як ще один приклад виберемо поверхню параболоїда обернання (рис. 5). Задано параболоїд обернання, де висота центрального вузла  $Z = 3$  лін. од., а радіус горизонтальної проекції поверхні  $R = 3$  лін.од., отже:

$$Z = -0,3333(x^2 + y^2) + 3. \quad (15)$$

Топологічна схема представлена на рис. 6. За опорний контур вибрано коло  $R = 3$ , яке лежить в горизонтальній площині. Вузли дискретної сітки рівномірно-розміщені вздовж кола опорного контура. Топологічна схема сітки має трикутні клітини (рис. 6).

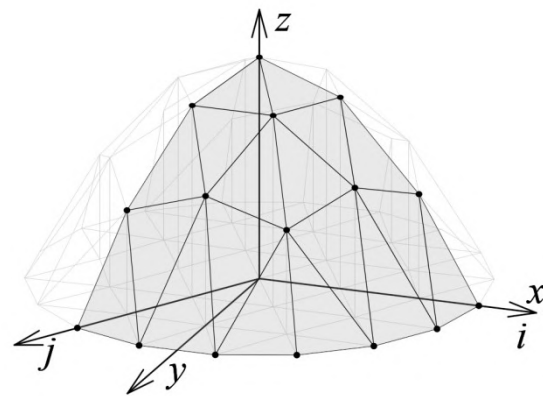


Рисунок 5 – Поверхня параболоїда обернання

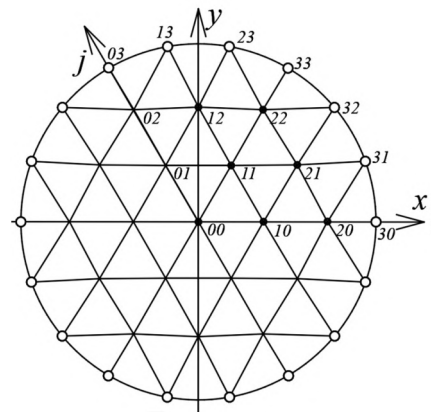


Рисунок 6 – Топологічна схема дискретної сітки параболоїда обернання

Абсиси і ординати вузлів сітки визначено СГМ шляхом розв’язання системи рівноваги вузлів (15) та (16). Результати розрахунків наведено у табл. 5.

$$\begin{aligned} -6x_{10} + 2x_{11} + 2x_{21} + x_{20} &= 0 \\ x_{10} - 6x_{20} + 2x_{21} + 8,6382 &= 0 \\ x_{10} - 7x_{11} + x_{21} + x_{22} &= 0 \\ x_{10} - x_{11} + x_{20} + x_{22} - 6x_{21} + 5,1171 &= 0 \\ x_{11} + x_{21} - 6x_{22} + 4,3189 &= 0 \\ -5y_{11} + y_{12} + y_{21} + y_{22} &= 0 \\ y_{11} - 6y_{21} + y_{22} + 2,9544 &= 0 \\ 2y_{11} - 6y_{12} + 2y_{22} + 5,9088 &= 0 \\ y_{11} + y_{12} + y_{21} - 6y_{22} + 7,4809 &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Таблиця 5 – Координати вузлів сітки параболоїда

$j=3$	X			0,521	1,5
	Y			2,954	2,598
	Z			0	0
$j=2$	X	0		1,091	2,298
	Y	1,934		1,89	1,928
	Z	1,753		1,412	0
$j=1$	X		0,553	1,675	2,819
	Y		0,958	0,967	1,026
	Z		2,592	1,753	0
$j=0$	X	0	1,107	2,182	3
	Y	0	0	0	0
	Z	3	2,592	1,412	0
		$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$

Площа однієї клітини визначається за формулою (14):

$$S = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{2}, \quad (17)$$

де  $A, B, C$  – коефіцієнти апроксимуючої площини  $\Gamma$ , яка розраховується за формулою:

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 & 1 \\ Y_2 & Z_2 & 1 \\ Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 & 1 \\ Z_2 & X_2 & 1 \\ Z_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad (18)$$

$$C = \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 & 1 \\ Z_2 & X_2 & 1 \\ Z_3 & X_3 & 1 \end{vmatrix},$$

де  $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Z_1, Z_2, Z_3$  – координати вершин трикутної клітини.

Площа, якій відповідає навантаження власної ваги на вузол, визначені як третини сумарної площі трикутних клітин (які належать цьому вузлу), формула (19) та занесені до клітин сітки трикутної схеми з нумерацією вершин (рис. 7):

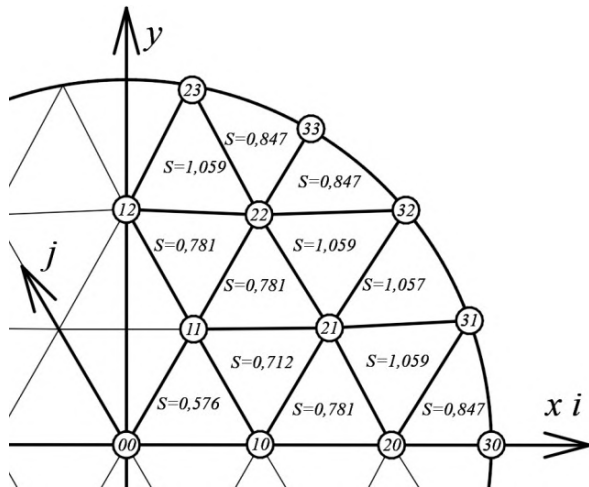


Рисунок 7 – Площа  $S$  клітин сітки параболоїда (значення представлено в лін. од.)

$$S_{i,j} = \frac{S_{i,j}^1 + S_{i,j}^2 + S_{i,j}^3 + S_{i,j}^4 + S_{i,j}^5 + S_{i,j}^6}{6}, \quad (19)$$

де верхні індекси – номер клітини, який належить цьому вузлу.

Власна вага елемента оболонки, яку віднесено до кожного вузла, визначається за формулою:

$$kP_{i,j} = 6Z_{i,j} - Z_{i,j-1} - Z_{i+1,j} - Z_{i+1,j+1} - Z_{i-1,j} - Z_{i-1,j-1}, \quad (20)$$

де  $kP_{i,j} = \frac{hg \sum_{m=1}^6 S_{i,j}^m}{3}, \quad (21)$

де  $h$  – товщина оболонки в точці  $i, j$ ;  $g$  – прискорення вільного падіння.

За формулою (20) визначено зовнішнє навантаження ( $kP_{i,j}$ ) на вузли сітки та записано у табл. 7.

Таблиця 7 – Зовнішнє навантаження  $kP_{i,j}$  на клітини сітки параболоїда (ум. од.)

$j=2$		0,418	0,396
$j=1$		0,408	0,418
$j=0$	0,408	0,408	0,396
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

За формулою (21) шляхом елементарних арифметичних перетворень визначено товщину  $h$  безмоментної оболонки у заданих вузлах сітки та записано у табл. 8.

Таблиця 8 – Товщина  $h$  оболонки у вузлах сітки параболоїда (ум. од.)

$j=2$		0,230	0,221
$j=1$		0,296	0,230
$j=0$	0,354	0,296	0,221
	$i=0$	$i=1$	$i=2$

## Висновки

У процесі проектування криволінійних оболонок важливим є забезпечення їхньої стійкості і рівноваги. Це робиться шляхом визначення оптимального розподілу навантажень і розрахунком необхідних товщин їхньої поверхні. У цій роботі запропоновано алгоритм оцінки дискретної геометричної форми безмоментної оболонки під дією власної ваги і мінімальної оцінки товщини в кожному вузлі. Використання СГМ дає змогу розрахувати просторовий розподіл товщини конструкції, що забезпечує створення поверхонь, які не лише відповідають заданим характеристикам надійності і довговічності конструкцій, а й оптимізують використання матеріалів, для їх виготовлення.

## Список літератури

1. Ковальов С. М., Ботвіновська С. І. Аналіз вхідних даних для формування дискретних рельєфів на основі обчислювальних Вісник Київського національного університету будівництва і архітектури (спеціальний випуск) 2006. № 4 (30). С. 135.

2. Даниловська Н. А. Дискретне моделювання поверхонь склепінь-оболонки: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. Київ: КІСІ, 1986. 20 с.
3. Золотова А. В. Застосування статико-геометричного методу формування поверхонь в задачах проектування поверхонь покриттів. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. 2015. Вип. 39. С. 74–79. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Spam\\_2015\\_39\\_11](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Spam_2015_39_11)
4. Романова Ю. В. Систематизація дискретних плоских сіток. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2016. № 92. С. 108–112.
5. Vorontsov O. V., Tulupova L. O., Vorontsova I. V. Discrete modeling of building structures geometric images *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. DOI: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.15467>
6. Воронцов О. В., Усенко В. Г., Воронцова О. В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат чотирьох точок двовимірних точкових множин на прикладі параболічних поверхонь. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ. КНУБА. 2021. Вип. 101. С. 19–33. URI: <https://reposit.nupp.edu.ua/handle/PoltNTU/10567>
7. Vorontsov O. V., Tulupova L. O., Vorontsova I. V. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*. 2018. Vol. 7. № 4.8. P. 560 – 565. <http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/6041>
8. Ковальов С. М., Ботвіновська С. І. Формування дискретного каркаса зрівноваженої нерегулярної сітки дискретно представленої поверхні. *Управління розвитком складних систем*. 2020. № 42. С. 75 – 81. DOI: 10.32347/2412-9933.2020.42.75-81
9. Шликов С. Ю., Спірінцев Д. В. Дослідження можливості використання методу на основі варіативного формування різницевих схем кутових параметрів для згущення наперед заданої форми кривої. *Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності*. 2024. № 1(ХІІІ), С. 21–24. <https://doi.org/10.20535/ngikg2024.XIII.310250>
10. Пустюльга С. І. Дискретне визначення геометричних об'єктів числовими послідовностями: автореф. дис. ... доктора техн. наук: 05.01. 01. Київ: Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт., 2006. 38 с. укр. <http://www.irbis-nbuv.gov.ua/aref/20081124008693>
11. Пустюльга С. І., Самостян В. Р., Хомич А. А. Дискретне моделювання криволінійних сіток із заданими крайовими умовами на трикутному плані суперпозицією числових послідовностей. *Науковий журнал "Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті"*. Луцьк: Луцький НТУ, 2016. Вип. 3 (7). С. 109–116.
12. Ковальов С. М., Ботвіновська С. І. Варіювання форми поверхні, яку дискретно представлено нерегулярною зрівноваженою сіткою. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2020. № 45. С. 89 – 96, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.45.89-96](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.45.89-96).

Стаття надійшла до редколегії 3.02.2025

**Kovalov Serhii** (Kovalev Sergej)

DSc, professor of Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics  
<https://orcid.org/0000-0002-1367-1730>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

**Botvinovska Svitlana**

DSc, chief of the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics,  
<https://orcid.org/0000-0002-1832-1342>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

**Kolhan Anna**

PhD Student, Assistant at the Department of Descriptive Geometry and Engineering Graphics,  
<https://orcid.org/0000-0002-2167-2864>

*Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv*

#### FORMING A DISCRETE FRAME OF AN EQUILIBRIUM IRREGULAR GRID OF A DISCRETELY PRESENTED SURFACE

**Abstract.** In modern construction and architectural design, approaches aimed at optimizing structures to reduce material consumption without compromising strength, aesthetics, and functionality are becoming increasingly relevant. One such approach is the static-geometric modeling method, which enables the design of moment-free shells that are characterized by the absence of bending moments under their own weight. The main goal of this study was to develop an efficient methodology for designing shell structures with minimal material usage while ensuring their stability. The work presents an approach that utilizes discrete models approximated by planes. Additionally, an algorithm for calculating specific parameters of moment-free shells is introduced, including the coordinates of the discrete grid nodes, surface area, and nodal forces. Special attention is given to determining the optimal thickness of shell elements, ensuring their equilibrium and resistance to external influences. To verify the method's effectiveness, modeling was conducted for spherical and rotational paraboloid shells. The developed methodology allowed for the consideration of geometric features and the interaction of structural elements.

**Keywords:** discrete grids; moment-free shells; static-geometric method (SGM); geometric modeling; architectural objects



## References

1. Kovalev S. M., Botvinovskaya S. I. (2006). Analysis of input data for the formation of discrete reliefs based on computational *Bulletin of the Kyiv National University of Construction and Architecture (special issue)* 2006. No. 4 (30). P. 135.
2. Danilovskaya N. A. Discrete modeling of vault-shell surfaces: author's abstract. dissertation ... candidate of technical sciences: 05.01.01. Kyiv: KISI, 1986. – 20 p.
3. Zolotova A. V. (2015). Application of the static-geometric method of surface formation in the problems of designing surfaces of coverings. *Modern problems of architecture and urban planning*. Issue 39. P. 74–79. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Spam\\_2015\\_39\\_11](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Spam_2015_39_11)
4. Romanova Yu. V. (2016). Systematization of discrete flat grids. *Applied geometry and engineering graphics*. No. 92. P. 108–112.
5. Vorontsov O. V., Tulupova L. O., Vorontsova I. V. (2018). Discrete modeling of building structures geometric images *International Journal of Engineering & Technology*. DOI: <https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.15467>
6. Vorontsov O. V., Usenko V. G., Vorontsova O. V. (2021). Discrete interpolation by superpositions of coordinates of four points of two-dimensional point sets on the example of parabolic surfaces. *Applied geometry and engineering graphics*. Kyiv. KNUBA. Issue 101. P. 19–33. URI: <https://reposit.nupp.edu.ua/handle/PoltNTU/10567>
7. Vorontsov O. V., Tulupova L. O., Vorontsova I. V. (2018). Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*. Vol. 7. No. 4.8. P. 560 – 565. <http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/6041>
8. Kovalyov S. M., Botvinovskaya S. I. (2020). Formation of a discrete frame of a balanced irregular mesh of a discretely represented surface. *Management of complex systems development*. No. 42. P. 75 – 81. DOI: 10.32347/2412-9933.2020.42.75-81
9. Shlykov, S. Y., Spirintsev D. V. (2024). Investigation of the possibility of using a method based on the variable formation of difference schemes of angular parameters for condensing a predetermined curve shape. *Applied geometry, engineering graphics and intellectual property objects*. No. 1(XIII), pp. 21–24. <https://doi.org/10.20535/ngikg2024.XIII.310250>
10. Pustyulga S. I. Discrete definition of geometric objects by numerical sequences: author's abstract of the dissertation ... of the doctor of technical sciences: 05.01. 01. Kyiv: Kyiv. National University of Construction and Architecture, 2006. 38 p. Ukrainian. <http://www.irbis-nbuv.gov.ua/aref/20081124008693>
11. Pustyulga S. I., Samostyan V. R., Khomych A. A. (2016). Discrete modeling of curvilinear grids with given boundary conditions on a triangular plane by superposition of numerical sequences. *Scientific journal "Modern technologies in mechanical engineering and transport"*. Lutsk: Lutsk NTU. Issue 3 (7). P. 109–116.
12. Kovalov, Serhii & Botvinovska, Svitlana, (2021). Varying the shape of a surface which is discrete presented by an irregular balanced grid. *Management of Development of Complex Systems*, 45, 89–96, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.45.89-96](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.45.89-96).

## Посилання на публікацію

- APA Kovalov, S., Botvinovska, S., & Kolhan, A., (2025). Geometric modeling of a moment-free shell of a given shape. *Management of Development of Complex Systems*, 61, 193–201, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.61.193-201](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.61.193-201).
- ДСТУ Ковальов С. М., Ботвіновська С. І., Колган А. В. Геометричне моделювання безмоментної оболонки заданої форми. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2025. № 61. С. 193 – 201, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.61.193-201](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.61.193-201).