

Лізунов Петро Петрович

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Недін Валентин Олегович

Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-3138-2892>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

ВПЛИВ ГІРОСКОПІЧНИХ МОМЕНТІВ НА ЧАСТОТИ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ТРАНСМІСІЙНИХ ВАЛІВ ПРИ РІЗНИХ ШВИДКОСТЯХ ОБЕРТАННЯ

Анотація. Наведені результати чисельного дослідження впливу гіроскопічних моментів на динамічну поведінку трансмісійного валу, а саме на зміну частот його власних коливань при зміні швидкості обертання та її напрямку. Експлуатація систем, що складаються з валів, часто здійснюється при їх обертанні з різними швидкостями. Вал, якщо представити його у вигляді пружного стержня, може здійснювати власні та вимушені коливання. Частоти власних коливань валу залежать від швидкості його обертання. Така поведінка обумовлюється прецесійним рухом. Через це коливальний рух валу розглядається у просторі з урахуванням гіроскопічних та інших інерційних навантажень. В якості результату показані залежності частот власних коливань у нерухомій та рухомій системах координат, які отримані за допомогою розробленого програмного забезпечення для дослідження динаміки пружних валів. Наведені чисельні значення частот власних коливань при відсутності обертання валу, а також значення критичних швидкостей обертання при прямій та зворотній прецесії. Здійснено аналіз отриманих результатів та зроблено висновок про можливість експлуатації обладнання у певних діапазонах частот. Відмічено, що частоти власних коливань пружних валів при обертанні залежать від впливу гіроскопічних моментів. Важливим параметром є власна частота коливань саме у рухомій системі координат, оскільки вона безпосередньо пов'язана з пружним тілом і, як показують наведені графіки, зміна величини частоти власних коливань у рухомій та нерухомій системах координат при зміні частоти обертання відбувається з різною інтенсивністю, а саме: у інерційній – повільно, у рухомій – стрімко. Окрім того, при зростанні швидкості обертання в діапазоні до критичних значень частота власних коливань у рухомій системі координат за значенням зменшується; при подальшому зростанні швидкості обертання в діапазоні вище критичної частота власних коливань починає збільшуватися, а прецесійний рух відбувається у протилежному напрямку.

Ключові слова: трансмісійний вал; інерційні навантаження; гіроскопічні моменти; частоти власних коливань; критичні швидкості

Постановка проблеми

При вивченні згинальних коливань валів, що обертаються, елементи згину необхідно розглядати у поєднанні з обертанням, оскільки в процесі таких коливань кожний переріз валу має прогини та кути повороту, що змінюються у часі за певним законом. При розгляданні задачі у просторі, в багатьох випадках відбувається такий рух валу під час коливання, при якому центри його перерізів рухаються за еліпсоподібною траєкторією, що являє собою прецесію, яка в свою чергу характеризує його пружні коливання.

Експлуатація систем, що складаються з валів, часто здійснюється при їх обертанні з різними

швидкостями. Вал, якщо представити його у вигляді пружного стержня, може здійснювати власні та вимушені коливання. Частоти власних коливань валу залежать від швидкості його обертання. Вони можуть збільшуватись чи зменшуватись зі збільшенням швидкості обертання. Така поведінка обумовлюється прецесійним рухом. В деяких випадках частота власних коливань не залежить чи мало залежить від швидкості обертання.

Для вивчення динамічної поведінки, аналізу динамічної стійкості валів при дії на них періодичних зовнішніх навантажень, у зв'язку з тим, що при певних співвідношеннях між частотою дії періодичного навантаження, що змушує коливання, і частотою власних коливань прямолінійна форма стає

динамічно нестійкою [1] (виникають поперечні коливання, амплітуда яких швидко зростає до критичних значень), в першу чергу важливим є питання про визначення частот власних коливань при різних швидкостях обертання та критичних швидкостей при прецесійному русі.

Аналіз основних досліджень і публікацій

За останні часи задачі динаміки коливань валів та стержнів, що обертаються, досліджені в роботах багатьох авторів.

Стаття [7] присвячена дослідженню динамічної поведінки композитного валу на жорстких підшипниках. У моделі враховано поперечну деформацію зсуву, обертальну інерцію та гіроскопічні ефекти. Розроблено скінченний елемент з шістьма ступенями вільності, який використовується для визначення власних частот коливань.

В роботі [8] запропоновано аналітичний метод розрахунку валу під впливом деформаційних збуджень корпусу. Модель валу розглядається як спрощена система «рушійний вал-корпус корабля», оскільки підшипники можна вважати сполучними структурами, які передають зусилля від корпусу до валу. Представлені рівняння руху валу. Отримано вібраційні характеристики валу при корпусних збудженнях для зазначених граничних умов.

Аналітичний метод розв'язання проблеми вібрації гребного вала під дією деформаційних збуджень корпусу запропоновано в роботі [9]. Модель вала зі збудженнями в підшипниках розглядається як спрощена система «гребний вал-корпус судна», оскільки підшипники можна вважати з'єднувальними конструкціями, що передають сили від корпусу до вала. Представлено рівняння руху вала, умови нерозривності та граничні умови, збудження корпусу включено до рівнянь умов нерозривності. Отримано характеристики вібрації вала під дією збуджень корпусу. Обговорюється вплив жорсткості гребного гвинта, опор, розташування збуджень корпусу, амплітуди збуджень та розміру вала.

В роботі [10] досліджується динаміка валів різного діаметру під час їх обертання на різних швидкостях. Метою дослідження є виявлення впливу різних діаметрів валів, що обертаються з різною швидкістю, на амплітуду та власну частоту коливання. Проводиться аналіз примусової вібрації валу. Встановлені параметри, які відповідають за вихід системи з ладу перед поломкою.

В роботі [11]. В роботі розглянуто вали зі змінним по довжині поперечним перерізом.

В роботі [2] авторами представлені результати чисельного дослідження поперечних коливань валів

з урахуванням гіроскопічних сил інерції. Показано, який вплив гіроскопічні сили оказують на поперечні коливання валів при обертанні. Використовуючи розроблену авторами програму, здійснено дослідження динаміки ряду об'єктів, робочі органи яких моделюються довгомірними пружними стержнями. Для об'єктів дослідження показано, що при певних швидкостях обертання валів та стержнів різної довжини в системі координат, що обертається разом з валом або стержнем, траєкторія руху центра перерізу вала має упорядкований характер у вигляді n -кінцевої зірки на інтервалі часу від моменту збудження до початку встановленого кругового коливального руху з амплітудою, що гармонійно змінюється за часом. Відмічено, що такі траєкторії руху обумовлені дією гіроскопічних сил інерції, які виникають при обертанні. В роботі [3] проведено чисельне дослідження впливу дії періодичної поздовжньої сили на поперечні коливання довгих стержнів, що обертаються. Коливальний рух розглянуто в просторі з урахуванням дії гіроскопічних сил та геометричної нелінійності стержня. Для досліджуваних об'єктів показано, що на різних швидкостях обертання і частотах дії ударного поздовжнього навантаження коливальний рух відбувається з неоднаковою поведінкою. На певних швидкостях з різною частотою дії осьового навантаження коливання мають встановлену періодичність і виникають із биттями, які є результатом дії періодичної осьової сили.

В статті [4] запропоновано методику чисельного диференціювання форм вигину стержнів значної довжини за допомогою поліноміальних сплайн-функцій, яка разом із використанням методу інтегрування за часом використовується для розв'язання задач динаміки коливального руху стержнів з урахуванням геометричної нелінійності, гіроскопічних та інших інерційних навантажень. Для підтвердження достовірності розробленої методики наведено результати чисельного диференціювання форм вигину стержнів, описаних заданими функціями, здійснено їх порівняння з результатами аналітичного диференціювання. Використовуючи запропоновану методику були здійснені дослідження, що викладені в роботах [2; 3; 5].

В роботі [5] наведені результати дослідження динамічної поведінки трансмісійного валу в перехідних режимах руху із зміною швидкості обертання. Такі режими руху виникають при експлуатації трансмісійних валів, що передають крутий момент від двигуна до виконавчого пристрою. Цей процес може супроводжуватись вібрацією валів із зміною частоти та амплітуди коливань. Побудовані діаграми, що відображають графіки коливального руху стержня, яким моделюється робота трансмісійного валу, при

встановлених параметрах системи. Процес коливального руху розглянуто у просторі з урахуванням інерційних навантажень. Показано, що при зміні швидкості обертання, а саме в момент її збільшення, цей процес триває зі збільшенням частоти коливання в інерційній системі протягом часу прискорення.

Аналіз присутніх у науковій літературі результатів показує, що в багатьох роботах приділяється увага визначенню критичних швидкостей обертання, частот власних коливань при різних параметрах системи, але недостатньо приділяється увага явищу прецесії коливального руху при обертанні, обумовленому впливом гіроскопічних моментів в різних режимах експлуатації зі зміною швидкості обертання.

Мета статті

Метою статті є представлення результатів чисельного дослідження впливу гіроскопічних моментів на динамічну поведінку трансмісійного валу, а саме на зміну частот власних коливань при зміні швидкості обертання та її напрямку.

Виклад основного матеріалу

Постановка задачі

Рух валу моделюється стержнем довжиною l (рис. 1), що обертається з кутовою швидкістю ω навколо прямолінійної осі O_1X_1 нерухомої системи координат $O_1X_1Y_1Z_1$. Зі стержнем пов'язана рухома система координат $OXYZ$. Коливальний рух стержня в системі координат $OXYZ$ характеризується переміщеннями $y(x,t)$ та $z(x,t)$ точок, що належать до його осі, у напрямку координатних осей OY та OZ відповідно.

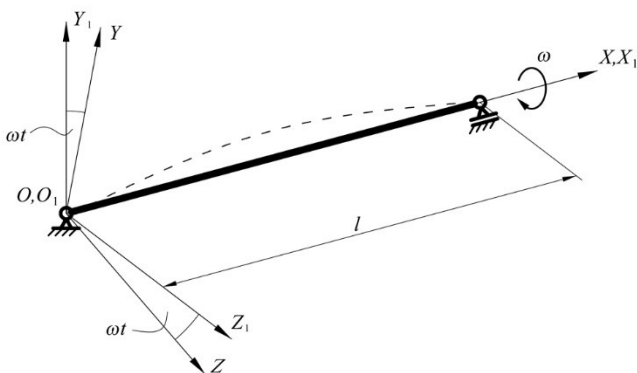


Рисунок 1 – Динамічна модель системи

Коливальний рух стержня у просторі при обертанні описується системою диференціальних рівнянь з частковими похідними з урахуванням гіроскопічних навантажень, які обумовлюються переносними, відносними та коріолісовими прискореннями у вигляді [6]:

$$\begin{cases} EI_1 y^{IV} - \bar{m} r^2 (\ddot{y}'' + \omega^2 y'') - 2\omega \bar{m} \dot{z} - \bar{m} \omega^2 y + \bar{m} \ddot{y} = 0, \\ EI_2 z^{IV} - \bar{m} r^2 (\ddot{z}'' + \omega^2 z'') + 2\omega \bar{m} \dot{y} - \bar{m} \omega^2 z + \bar{m} \ddot{z} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де E – модуль пружності матеріалу стержня; I_1, I_2 – моменти інерції перерізу стержня відносно осей OZ, OY ; r – радіус інерції перерізу стержня; $\bar{m}$ – маса одиниці довжини стержня; ω – швидкість обертання стержня навколо осі, що співпадає з його віссю у недеформованому стані. Штрихом в рівняннях позначено диференціювання по x , крапкою – по t .

Методика дослідження

Для n -ої форми вигину стержня розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) в загальному випадку може бути знайдено у вигляді:

$$y(x,t) = F_y(x) \cdot A_n(t), \quad z(x,t) = F_z(x) \cdot B_n(t), \quad (2)$$

де $F_y(x), F_z(x)$ – функції n -ої форми вигину стержня в проекції на площини XOY, XOZ відповідно; $A_n(t), B_n(t)$ – функції відхилення за часом центра перерізу стержня у напрямках вздовж осей OY, OZ відповідно.

Загальний розв'язок рівнянь відносно форми вигину для вихідних граничних умов має вигляд:

$$F_y(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad F_z(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Для визначення власних частот коливань λ при різних швидкостях обертання для функцій $A_n(t), B_n(t)$ розв'язок можна шукати у вигляді:

$$A_n(t) = A_n \cos \lambda_0 t, \quad B_n(t) = B_n \sin \lambda_0 t,$$

де A_n, B_n – амплітуда відхилення центрів перерізів стержня в напрямках координатних осей OY і OZ відповідно; λ_0 – частота власних коливань стержня в рухомій системі координат $OXYZ$.

Розв'язавши вихідну систему рівнянь (1) для випадку $I_1 = I_2 = I$ відносно λ_0 , можна отримати характеристичне рівняння

$$\frac{EI}{\bar{m}} \cdot \frac{n^4 \pi^4}{l^4} - \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2} \cdot (\lambda_0^2 - \omega^2) - (\lambda_0^2 + \omega^2) - 2\omega \lambda_0 = 0,$$

розв'язавши яке, враховуючи, що $\lambda_0 = \lambda - \omega$, де λ – власна частота в нерухомій системі координат, можна отримати вираз

$$\lambda = \frac{\omega \cdot \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2} \pm \sqrt{\omega^2 \cdot \frac{r^4 n^4 \pi^4}{l^4} + \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \cdot \frac{EI}{\bar{m}} \cdot \left(1 + \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2}\right)}}{\left(1 + \frac{r^2 n^2 \pi^2}{l^2}\right)}. \quad (3)$$

Вираз (3) для n -ої форми коливань дає два значення λ – одне додатне, відповідає прямій прецесії, друге від'ємне, відповідає зворотній прецесії. Змінивши напрям обертання, тобто величину ω на $-\omega$, отримаємо додатні значення λ для зворотної прецесії і, відповідно, від'ємні для прямої.

Результати

В даній роботі здійснено визначення частот власних коливань, а також критичних швидкостей обертання трансмісійного валу із зовнішнім діаметром $d_{\text{зв}}=0,10$ м, внутрішнім $d_{\text{вн}}=0,06$ м, з модулем пружності матеріалу $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа, моментом інерції перерізу $I_y=I_z=0,427 \cdot 10^{-5}$ м⁴, погонною масою $\bar{m}=39,46$ кг/м, довжиною $l=3$ м.

На рис. 2 показані залежності частот власних коливань λ від швидкості обертання ω в діапазоні значень від -3000 с⁻¹ до 3000 с⁻¹. Залежності частот λ в нерухомій системі координат від кутової швидкості ω представлені у вигляді графіку функцій $\lambda_{(n)}=\lambda_n(\omega)$, що відображає сімейство кривих для n -ої форми коливань, розташованих косо-симетрично відносно осі ω . Значення у першому та третьому квадранті відповідають прямій прецесії, а в другому та четвертому – зворотній.

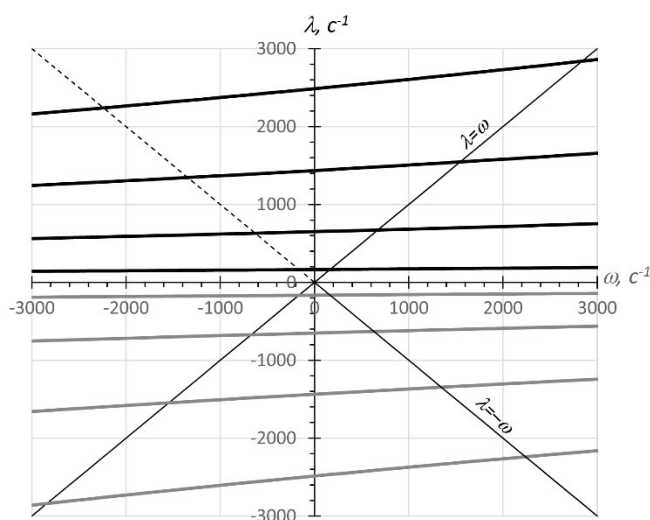


Рисунок 2 – Залежність частот власних коливань стержня λ від швидкості обертання ω

Точки перетину залежностей, що описуються функціями $\lambda_{(n)}=\lambda_n(\omega)$, з віссю λ відповідають частотам власних коливань стержня при відсутності обертання, значення яких наведені в табл. 1.

При обертанні стержня з кутовою швидкістю, яка дорівнює величині частоти його власних коливань в нерухомій системі координат, виникає критичний стан. У випадку прямої прецесії криві, що відображають функції залежності $\lambda_{(n)}=\lambda_n(\omega)$ для n -ої форми вигину стержня, перетинають промінь $\lambda=\omega$ в точках, що відповідають критичним швидкостям прямої прецесії, значення яких наведені в табл. 2. У випадку зворотної прецесії лінії, які відображають функції залежності $\lambda_{(n)}=\lambda_n(\omega)$, перетинають промінь $\lambda=-\omega$ в точках, що відповідають критичним швидкостям зворотної прецесії, значення яких наведені в табл. 3. Залежності показують, що зі збільшенні швидкості обертання при прямій прецесії

частота власних коливань в нерухомій системі координат збільшується, а при зворотній навпаки – зменшується. Розбіжність між значеннями критичних швидкостей прямої та зворотної прецесії зростає зі збільшенням гармоніки коливань.

Таблиця 1 – Частоти власних коливань, с⁻¹

$\omega=0$			
λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\pm 164,69$	$\pm 650,82$	$\pm 1436,00$	$\pm 2487,02$

Таблиця 2 – Критична швидкість обертання, с⁻¹

Пряма прецесія			
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\pm 166,05$	$\pm 672,63$	$\pm 1546,71$	$\pm 2839,55$

Таблиця 3 – Критична швидкість обертання, с⁻¹

Обернена прецесія			
ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$\pm 163,36$	$\pm 631,00$	$\pm 1346,10$	$\pm 2239,84$

На рис. 3 показані залежності частот власних коливань λ_0 від швидкості обертання ω в тому ж діапазоні значень.

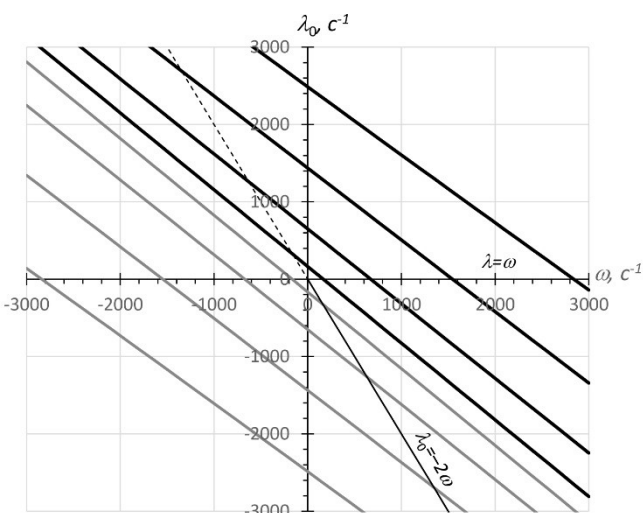


Рисунок 3 – Залежність частот власних коливань стержня λ_0 від швидкості обертання ω

В рухомій системі координат, яка обертається разом з валом, у випадку прямої прецесії лінії, що відображають функції залежності $\lambda_{0(n)}=\lambda_{0n}(\omega)$ для n -ї форми вигину перетинають вісь ω в точках, які відповідають критичним швидкостям прямої прецесії, а у випадку зворотної прецесії ці лінії перетинають промінь $\lambda_0=-2\omega$ в точках, які відповідають критичним швидкостям зворотної

прецесії. Точки перетину зазначених залежностей з віссю λ_0 відповідають частотам власних коливань валу при відсутності обертання, значення яких дорівнюють значенням, що наведені в табл. 1.

Слід звернути увагу на те, що при зростанні швидкості обертання до критичного значення n -ї гармоніки частота власних коливань в рухомій системі координат λ_0 зменшується. При подальшому зростанні швидкості обертання вище критичної, частота власних коливань λ_0 починає збільшуватися за значенням, але з протилежним знаком, що вказує на те, що прецесійний рух при цьому починає відбуватись в протилежному напрямку від напрямку обертання. Цей факт графічно демонструє зазначена в роботах [2 – 5] розроблена авторами комп'ютерна програма. Таке збільшення в свою чергу призводить до зростання амплітуди коливань.

Висновок

Динамічна поведінка трансмісійних валів під час їх експлуатації постійно привертає до себе увагу, оскільки в механізмах, де вони використовуються,

час від часу виникають режими роботи, які супроводжуються значними вібраціями. Частоти власних коливань таких валів при обертанні залежать від впливу гіроскопічних моментів. Як показують наведені графіки, зміна величини частоти власних коливань у рухомій та нерухомій системах координат при зміні частоти обертання відбувається з різною інтенсивністю, а саме, в інерційній повільно – тангенс кута нахилу кривих $\lambda_{(n)} = \lambda_n(\omega)$ до осі ω має достатньо малі величини (рис. 2), в рухомій досить стрімко – тангенс кута нахилу кривих $\lambda_{0(n)} = \lambda_{0n}(\omega)$ до осі ω має значні величини (рис. 3). Окрім того, при зростанні швидкості обертання в діапазоні докритичних значень частота власних коливань в рухомій системі координат за значенням зменшується, відповідно при критичній швидкості дорівнює нулю, а при подальшому зростанні швидкості обертання в діапазоні вище критичної, частота власних коливань починає збільшуватися, при цьому прецесійний рух виникає в протилежному напрямку.

Список літератури

1. Баженов В. А., Погорелова О. С., Постнікова Т. Г. Хаос та сценарії переходу до хаосу у віброударній системі. Київ : Каравела, 2019. 146 с.
2. Лізунов П. П., Недін В. О. Вплив гіроскопічних сил на коливальний рух валів при обертанні. Опір матеріалів і теорія споруд. 2020. Вип. 105. С. 223–231.
3. Лізунов П. П., Недін В. О. Параметричні коливання пружних стрижнів, що обертаються, під дією періодичних поздовжніх сил. Управління розвитком складних систем. Київ, 2020. № 44. С. 56–64. URL: [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.56-64](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.56-64).
4. Лізунов П. П., Недін В. О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. Управління розвитком складних систем. Київ, 2021. № 46. С. 70–75. URL: [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75).
5. Лізунов П. П., Недін В. О. Вібрації трансмісійних валів при перехідних режимах руху. Опір матеріалів і теорія споруд. 2023. Вип. 110. С. 229–237.
6. Tondl A. Some problems of rotor dynamics. Prague : Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1965. 434 p.
7. Boukhalfa A., Hadjoui A., Hamza Cherif S. M. Free Vibration Analysis of a rotating composite shaft using the p-version of the finite element method. International Journal of Rotating Machinery. URL: [doi:10.1155/2008/752062](https://doi.org/10.1155/2008/752062).
8. Chang T., Guo Z. L., Zhou R. K. A Study of Shaft Vibration Based on Transfer Matrix. Applied Mechanics and Materials. 2013. Vol. 365–366. P. 339–343. URL: [doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.365-366.339](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.365-366.339).
9. Cong Z., Tian Z., Yan X. Analytical analysis of the vibration of propulsion shaft under hull deformation excitations. Journal of Vibroengineering. 2016. Vol. 18, Issue 1. P. 44–55.
10. Kumar S., Sehgal R., Singh S. Vibrations signature analysis of whirling shaft of varying diameters operated at varying speeds. Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1240 (1). URL: [doi:10.1088/1742-6596/1240/1/012155](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1240/1/012155).
11. Wei Y., Zhao Z., Chen W., Liu Q. Influence of Axial Loads to Propagation Characteristics of the Elastic Wave in a Non-Uniform Shaft. Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2019. No. 32:70. P. 13.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.2025

Lizunov Petro

DSc, Professor, is the Head of the Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0003-2924-3025>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Nedin Valentyan

PhD, is with the Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0003-3138-2892>

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

THE GYROSCOPIC MOMENTS INFLUENCE ON THE NATURAL OSCILLATION FREQUENCIES OF TRANSMISSION SHAFTS AT DIFFERENT ROTATIONAL SPEEDS

Abstract. The paper presents the numerical investigation results of the gyroscopic moments' influence on the dynamic behavior of a transmission shaft, specifically on the change in its natural oscillation frequencies with varying rotational speeds and direction. Systems that include shafts are often operated at different rotational speeds. If a shaft is represented as an elastic rod, it can perform natural and forced oscillations. The natural frequencies of the shaft depend on its rotational speed. This behavior is caused by precession motion. Therefore, the oscillatory motion of the shaft is considered in space, accounting for gyroscopic and other inertial forces. As a result, the dependences of the natural oscillation frequencies in the inertial and rotating coordinate systems, plotted using developed software for studying the dynamics of elastic shafts, are shown. The numerical values of the natural oscillation frequencies for an unmoved shaft and its critical rotational speeds for direct and reverse precession are also presented. An analysis of the results and conclusions regarding the possibility of operating the shaft in certain frequency ranges have been made. It is noted that the natural frequencies of elastic shafts during rotation are dependent on the influence of gyroscopic moments. An important parameter is the natural oscillation frequency in the rotating coordinate system, as it is directly related to the elastic body. As the diagrams show, the change in the natural frequency in the rotating and inertial coordinate systems occurs with different intensity when the rotational frequency changes: slowly in the inertial system and rapidly in the rotational system. In addition, when the rotational speed increases in the range up to critical values, the natural oscillation frequency in the rotating coordinate system decreases. With a further increase in rotational speed beyond the critical value, the natural oscillation frequency begins to grow, and the precession movement occurs in the reverse direction.

Keywords: transmission shaft; inertia forces; gyroscopic moments; natural frequencies; critical speeds

References

1. Bazhenov, V. A., Pohorielova, O. S., & Postnikova, T. H. (2019). *Chaos and scenarios of transition to chaos in a vibro-impact system*. Karavela.
2. Lizunov, P. P., & Nedin, V. O. (2020). Influence of gyroscopic forces on oscillatory motion of shafts during rotation. *Resistance of Materials and Theory of Structures*, 105, 223–231.
3. Lizunov, P. P., & Nedin, V. O. (2020). Parametric oscillations of rotating elastic rods under the action of periodic longitudinal forces. *Management of Complex Systems Development*, 44, 56–64. URL: [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.56-64](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2020.44.56-64).
4. Lizunov, P. P., & Nedin, V. O. (2021). Numerical differentiation of bending forms of long elastic rods. *Management of Complex Systems Development*, 46, 70–75. URL: [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75).
5. Lizunov, P. P., & Nedin, V. O. (2023). Vibrations of transmission shafts under transient motion regimes. *Resistance of Materials and Theory of Structures*, 110, 229–237.
6. Tondl, A. (1965). *Some problems of rotor dynamics*. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences.
7. Boukhalfa, A., Hadjou, A., & Hamza Cherif, S. M. (n.d.). Free Vibration Analysis of a rotating composite shaft using the p-version of the finite element method. *International Journal of Rotating Machinery*. URL: [doi:10.1155/2008/752062](https://doi.org/10.1155/2008/752062).
8. Chang, T., Guo, Z. L., & Zhou, R. K. (2013). A Study of Shaft Vibration Based on Transfer Matrix. *Applied Mechanics and Materials*, 365–366, 339–343. URL: [doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.365-366.339](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.365-366.339).
9. Cong, Z., Tian, Z., & Yan, X. (2016). Analytical analysis of the vibration of propulsion shaft under hull deformation excitations. *Journal of Vibroengineering*, 18 (1), 44–55.
10. Kumar, S., Sehgal, R., & Singh, S. (2019). Vibrations signature analysis of whirling shaft of varying diameters operated at varying speeds. *Journal of Physics: Conf. Series*, 1240 (1). URL: [doi:10.1088/1742-6596/1240/1/012155](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1240/1/012155).
11. Wei, Y., Zhao, Z., Chen, W., & Liu, Q. (2019). Influence of Axial Loads to Propagation Characteristics of the Elastic Wave in a Non-Uniform Shaft. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 32 (70), 13.

Посилання на публікацію

- APA Lizunov, P., & Nedin, V. (2025). The gyroscopic moments influence on the natural oscillation frequencies of transmission shafts at different rotational speeds. *Management of Development of Complex Systems*, 63, 185–190, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.63.185-190](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.63.185-190).
- ДСТУ Лізунов П. П., Недін В. О. Вплив гіроскопічних моментів на частоти власних коливань трансмісійних валів при різних швидкостях обертання. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2025. № 63. С. 185 – 190, [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.63.185-190](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.63.185-190).