

Затилюк Герман Анатолійович

Доктор філософії в прикладній механіці, доцент кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0000-0003-0392-2214>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

Бартків Богдан Ярославович

Аспірант кафедри будівельної механіки,

<https://orcid.org/0009-0000-0174-5889>

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ

**ОГЛЯД ТЕОРІЇ І МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ОСНОВ
З ВРАХУВАННЯМ ЇХ РЕОЛОГІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ**

***Анотація.** Проведено систематичний огляд сучасних теоретичних підходів і чисельних методів моделювання взаємодії споруд з пружнопластичними ґрунтовими основами з урахуванням їх реологічних властивостей. Відстежено еволюцію наукових уявлень від класичних спрощених моделей (модель постелі Вінклера, лінійно-пружний півпростір) до сучасних узагальнених в'язкопружнопластичних формулювань. Проаналізовано основні класи реологічних моделей ґрунту (консолідація, лінійна та нелінійна повзучість, об'єднані в'язкопластичні теорії) та сфери їх застосування, а також здійснено систематизацію методів чисельного моделювання основ із особливою увагою до методу скінченних елементів та його модифікацій. Наведено порівняльний аналіз десяти найпоширеніших реологічних моделей, що використовуються в сучасній геомеханіці, з оцінкою їхніх можливостей і обмежень. Огляд виявив, що точний прогноз напружено-деформованого стану «споруда–основа» неможливий без врахування реологічних явищ (повзучості, консолідації), особливо для навантажених або слабких ґрунтів. Показано, що поступове ускладнення моделей – від пружних до в'язкопластичних – підвищує відповідність розрахунків реальній поведінці основ, проте супроводжується зростанням кількості параметрів і складністю їх експериментального визначення. Встановлено, що існуючі «уніфіковані» моделі потребують трудомісткої калібровки, яка обмежує їх практичне застосування. Серед актуальних проблем – недостатня адаптованість моделей для нестандартних ґрунтів (органічних, насипних, мерзлих), необхідність врахування анізотропії та циклічних впливів, підвищення точності довготривалих прогнозів. Перспективними напрямками вдосконалення є розробка мультимасштабних підходів, що поєднують мікро- і макромеханіку ґрунту, та інтеграція методів машинного навчання для автоматизації підбору параметрів моделей. Впровадження таких рішень підвищить надійність розрахунків і економічну ефективність проектування у складних геотехнічних умовах.*

Ключові слова: реологія ґрунтів; пружнопластичність; в'язкопружність; повзучість; консолідація; конститутивні моделі

Постановка проблеми

Проблема забезпечення надійності, довговічності та економічної ефективності будівельних конструкцій нерозривно пов'язана з коректним врахуванням їх взаємодії з ґрунтовою основою. Основа сприймає навантаження від споруди і передає його на глибші шари ґрунтового масиву, при цьому її деформативні властивості безпосередньо впливають на перерозподіл зусиль, розвиток деформацій та загальний напружено-деформований стан (НДС) надземних конструкцій. Недооцінка або невірне моделювання поведінки основи може призвести до зниження значень осідань, появи тріщин, втрати експлуатаційної

придатності і, в критичних випадках, до руйнування споруд. Водночас надмірний запас міцності та жорсткості, закладений через невизначеність у поведінці основи, веде до невиправданого здорожчання будівництва.

Традиційні методи розрахунку взаємодії «конструкція – основа», що базуються на спрощених моделях (модель коефіцієнта постелі Вінклера, модель лінійно-пружного півпростору), мають суттєві обмеження [2; 9]. Вони не враховують або враховують дуже наближено нелінійний характер деформування ґрунтів та розвиток незворотних деформацій, що є характерним для реальних умов експлуатації більшості споруд, особливо при значних навантаженнях або при будівництві на слабких ґрунтах.

Реальні ґрунтові основи демонструють складну пружнопластичну поведінку. При досягненні певного рівня напружень в ґрунті виникають пластичні деформації, які не зникають після розвантаження. Цей процес призводить до перерозподілу контактних тисків під фундаментом, зміни жорсткості основи та може суттєво впливати на осідання та зусилля в конструкції [1]. Ігнорування пластичності може призвести до невірної визначення несучої здатності основи та небезпечної недооцінки деформацій конструкції, особливо в зонах концентрації напружень (під кутами та краями фундаментів). Розвиток пластичних зон є визначальним при аналізі стійкості та граничного стану системи «конструкція – основа».

Окрім миттєвої пружнопластичної реакції, багато типів ґрунтів, зокрема глинисті, мулисті, торф'яні, лесові та насипні, проявляють виражені реологічні властивості, тобто їх деформації розвиваються в часі навіть при незмінному навантаженні [2]. Ці процеси пов'язані переважно з двома механізмами:

1. *Фільтраційна консолідація*: поступове відтискання порової води з об'єму ґрунту під дією градієнтів тиску, що призводить до ущільнення скелету та зменшення порового тиску (первинна консолідація) [4; 5].

2. *Повзучість скелету ґрунту*: в'язке деформування самого скелету ґрунту під дією постійних ефективних напружень (вторинна консолідація або власне повзучість) [2; 3].

Реологічні процеси можуть тривати роками і навіть десятиліттями після завершення будівництва, призводячи до значних довготривалих осідань, які можуть перевищувати осідання, що виникли під час будівництва [13; 16; 17]. Ці осідання, особливо їх нерівномірність, є причиною виникнення додаткових зусиль у конструкціях, розкриття тріщин, порушення нормальної експлуатації інженерних мереж та обладнання. Врахування реології є критично важливим для прогнозування довготривалої поведінки та забезпечення експлуатаційної надійності відповідальних споруд [12]. Сучасні норми проєктування (наприклад, ДБН В.2.1-10:2018; Eurocode 7, 2004) вказують на необхідність врахування довготривалих процесів, проте практичні методики такого врахування, особливо в поєднанні з пластичністю, потребують вдосконалення.

Особливу складність становить сукупний вплив пружнопластичності та реології. Розвиток пластичних деформацій може змінювати структуру ґрунту та впливати на параметри його повзучості. З іншого боку, процеси повзучості та релаксації напружень в основі можуть призводити до перерозподілу напружень у часі, потенційно ініціюючи подальший розвиток пластичних зон або

змінюючи їх конфігурацію [6; 7]. Комплексний аналіз такої взаємодії є значно складнішим, ніж розгляд цих ефектів окремо.

Мета статті

Метою статті є систематизація сучасних теоретичних основ і методів чисельного моделювання пружнопластичних ґрунтових основ з врахуванням реологічних властивостей, проведення порівняльного аналізу існуючих моделей та визначення актуальних проблем і перспектив подальших досліджень у цій галузі.

Аналіз основних досліджень і публікацій

Аналіз науково-технічної літератури показує, що значна увага приділялася розвитку моделей ґрунтової основи та методів розрахунку її взаємодії з конструкціями [2; 5 – 7]. Класичні підходи (наприклад, роботи К. Терцагі, Р. Пека [4]) заклали основи розрахунку ґрунтів як пружного півпростору. Подальші дослідження зосередилися на врахуванні реологічних явищ у ґрунті: зокрема, С. С. В'ялов [2] та Л. Б'єррум [3] одними з перших описали повзучість та проблеми будівництва на м'яких глинистих ґрунтах. Розвиток теорії пластичності ґрунтів відбувався через запровадження фізично обґрунтованих критеріїв міцності (Мора – Кулона, Друкера – Прагера тощо) та відповідних конститутивних моделей. Важливим кроком стало поєднання пластичної й в'язкої поведінки: фундаментальні роботи П. Перзини [6] запропонували уніфікований підхід до в'язкопластичності, що заклало основу для сучасних моделей повзучості ґрунтів.

Запровадження чисельних методів, передусім методу скінченних елементів, відкрило нові можливості для аналізу складних моделей ґрунтових основ [7; 8]. Сьогодні існують численні програмні комплекси (Plaxis, Midas GTS NX, Abaqus, ANSYS та ін.), які дозволяють моделювати систему «споруда–ґрунт» з врахуванням нелінійної поведінки ґрунту та реологічних процесів у часі. У цих комплексах реалізовані різноманітні реологічні моделі (лінійні моделі Максвелла, Кельвіна – Фойгта, модель Бюргерса; модифіковані Cam-Clay з повзучістю тощо) [9; 15 – 19]. Відомо, що для адекватних результатів потрібен коректний вибір моделі й ретельна її калібровка. Проте більшість універсальних моделей потребують великого обсягу експериментальних даних для визначення параметрів [1; 7; 10]. Таким чином, попри значний прогрес у дослідженнях, наявні підходи ще не повністю розв'язують проблему комплексного врахування пластичності та реології у практиці проєктування. Це обумовлює актуальність

подальшого узагальнення існуючих методів і визначення напрямків їх вдосконалення, що і виконано в даній роботі.

Виклад основного матеріалу

Чисельні методи та алгоритмічні аспекти. Розвиток чисельних методів відкрив можливість аналізувати складні моделі ґрунту в реальних інженерних задачах. Метод скінченних елементів став де-факто стандартним інструментом геотехнічного аналізу пружнопластичних основ [7]. З його допомогою можна моделювати просторову роботу системи «споруда – ґрунт», враховуючи нелінійність матеріалів і реологічні процеси у часі [8]. Для прискорення розрахунків та підвищення стійкості алгоритмів запропоновано ряд модифікацій МСЕ. Зокрема, розроблено напіваналітичні підходи, що спрощують розв'язання задач тривалої взаємодії. Метод [10] поєднує аналітичні рішення і МСЕ для ефективного прогнозування осідань будівель на пружнопластичній основі. Поряд з МСЕ використовується метод граничних елементів (МГЕ) та їх комбінації. Так, розроблено підходи, де надбудова моделюється тривимірним МСЕ, а ґрунт – площинним МГЕ з реологічною моделлю ґрунту. Така схема дозволяє ефективно врахувати нескінченність ґрунтового масиву при розрахунку повзучості і консолідації основи [18].

Верифікація чисельних моделей здійснюється шляхом порівняння з аналітичними рішеннями спрощених задач та з даними польових/лабораторних випробувань. Так, рішення Біота [5] для консолідації шаруватих основ і класичні формули осідань слугують базою для перевірки модулів консолідації в програмних комплексах. Спеціальні експериментальні дослідження проводяться для оцінки параметрів повзучості ґрунту (наприклад, тривалі стабілізовані випробування ґрунтових зразків на повзучість у одновісному стисненні) [13]. На основі таких даних калібруються параметри моделей – в'язкість, параметри повзучості тощо.

Моделі пружнопластичної основи. Для врахування незворотних деформацій використовуються моделі, що базуються на теорії пластичності. Широке застосування знайшли критерії міцності та поверхні текучості Кулона–Мора, Друкера–Прагера, Мізеса–Шлейхера, Боткіна та їх модифікації [3]. Розроблені відповідні теорії пластичної течії (асоційований та неасоційований закони). Ці моделі дозволяють описувати розвиток зон пластичних деформацій в основі, визначати її несучу здатність та прогнозувати нелінійні осідання.

Моделі, що враховують реологічні властивості. Для опису залежності деформацій від часу застосовуються моделі теорії повзучості та в'язкопружності.

Теорія консолідації Терцагі–Флоріна: Описує процес осідання водонасичених ґрунтів у часі за рахунок відтискання порової води [4].

Лінійні реологічні моделі: Моделі Максвелла, Кельвіна–Фойгта, стандартне лінійне тіло (модель Зенера), модель Бюргерса, що комбінують пружні (пружини) та в'язкі (демпфери) елементи для опису в'язкопружної поведінки [12; 20].

Нелінійні теорії повзучості: Теорії спадкової повзучості (Больцмана–Вольтерра, Арутюняна–Розовського), теорії течії, нелінійні залежності швидкості деформації повзучості від напружень та часу (наприклад, степеневі закони). Ці теорії дозволяють більш точно описати повзучість скелету ґрунту при різних рівнях напружень [2; 6].

В'язкопружнопластичні моделі: Найбільш складні моделі, що намагаються одночасно врахувати пружні, пластичні та в'язкі (реологічні) властивості ґрунту. Часто будуються шляхом комбінації теорій пластичності та повзучості (наприклад, модель Пержини) [6]. Розробка та застосування таких моделей пов'язані зі значними труднощами як у визначенні параметрів моделі, так і в реалізації чисельних розрахунків [2].

Огляд реологічних моделей

Фундаментальні моделі. Для опису механічних властивостей матеріалів реологія використовує моделі, в основі яких лежать три фундаментальні закони залежності між напруженням і деформацією. Кожен закон описує ідеалізований матеріал з однією з трьох базових властивостей [20]:

- Пружність: ідеально пружне тіло Гука.
- В'язкість: ідеально в'язке тіло Ньютона.
- Пластичність: ідеально пластичне тіло Сен – Венана – Кулона.

Аналіз цих моделей дозволяє систематизувати їхні ключові відмінності, що стосуються не лише математичного опису, але й фізичної сутності процесів деформації. Зведена порівняльна табл. 1 наочно демонструє ці відмінності.

Комбіновані моделі. Для опису складної реологічної поведінки реальних тіл, зокрема ґрунтових середовищ, застосовується підхід, що базується на комбінуванні трьох фундаментальних ідеалізованих моделей [12]. В основі цього підходу лежить аксіоматичне припущення, що будь-який реальний матеріал одночасно володіє пружними, в'язкими та пластичними властивостями, хоча їхній прояв та співвідношення можуть кардинально відрізнятися.

Складніші конститутивні моделі створюються шляхом послідовного або паралельного з'єднання відповідних реологічних елементів – пружини, демпфера та елемента сухого тертя.

Таблиця 1 – Характеристика фундаментальних реологічних моделей

Характеристика	Ідеально пружне тіло Гука	Ідеально в'язке тіло Ньютона	Ідеально пластичне тіло Сен-Венана – Кулона
Основна властивість	Пружність	В'язкість	Пластичність
Зв'язок	Напруження ~ Деформація	Напруження ~ Швидкість деформації	Напруження = const (після порогу)
Математичний вираз	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = \eta\dot{\gamma}$	$\sigma = \sigma_m$ при $\varepsilon > 0$
Оборотність деформації	Повністю оборотна	Повністю необоротна	Повністю необоротна
Залежність від часу	Відсутня (миттєва реакція)	Присутня (реакція на швидкість)	Відсутня (незалежна від швидкості)
Взаємодія з енергією	Повне зберігання (потенційна енергія)	Повне розсіювання (тепло)	Повне розсіювання (тепло)
Механізм дисипації	Відсутній	Безперервний, залежний від швидкості	Пороговий, незалежний від швидкості
Реологічний елемент	Пружина	Демпфер (поршень у рідині)	Елемент сухого тертя (повзун)
Ключовий параметр	Модуль пружності (E)	Динамічна в'язкість (η)	Межа плинності (σ_m)

Такий синтез дозволяє математично моделювати ключові для ґрунтів процеси, що залежать від часу, зокрема повзучість скелета та фільтраційну консолідацію водонасичених порід [1; 2; 12].

Модель Максвелла є однією з найпростіших моделей лінійної в'язкопружності. Вона представляє собою послідовне з'єднання пружного елемента (пружини) та в'язкого елемента (демпфера) (рис. 1, а) [20].

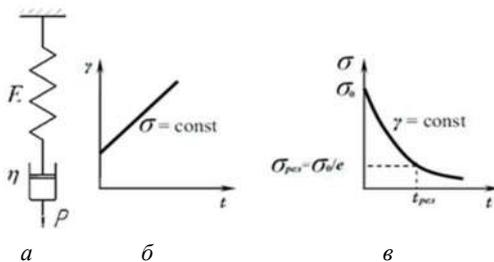


Рисунок 1 – Модель Максвелла: а – схема моделі; б – залежність деформацій від часу; в – залежність напружень від часу [20]

При послідовному з'єднанні напруження σ в обох елементах є однаковим і дорівнює загальному напруженню в системі, а загальна швидкість деформації є сумою швидкостей деформацій кожного елемента [2]:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_\eta.$$

Модель Максвелла демонструє два ключові реологічні явища: повзучість та релаксацію. При сталому навантаженні ($\sigma(t) = \sigma_0$) (рис. 1, б) деформація лінійно зростає з часом, що описує стаціонарну повзучість [2]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t.$$

При утриманні постійної деформації $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, напруження експоненційно зменшуються до нуля з часом релаксації $\tau_{rel} = \eta/E$. В цьому випадку швидкість деформації дорівнює нулю, а конститутивне рівняння набуває вигляду [2]:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t} = \sigma_0 e^{-\frac{t}{\tau_{rel}}}.$$

Обмеженнями моделі для ґрунтів є відсутність первинної (затухаючої) повзучості та прогнозування необмеженої деформації.

Модель Кельвіна-Фойгта використовує паралельне з'єднання пружного та в'язкого елементів (рис. 2) [20]. При такому з'єднанні деформації обох елементів однакові ($\varepsilon_E = \varepsilon_\eta = \varepsilon$), а загальне напруження є сумою напружень в кожному елементі ($\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta$). Основне конститутивне рівняння [2]:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}.$$

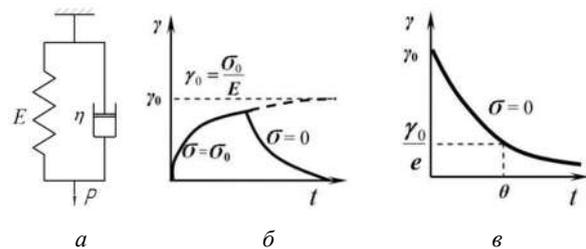


Рисунок 2 – Модель Кельвіна-Фойгта: а – схема моделі; б, в – залежність деформацій від часу [20]

При миттєвому прикладанні постійного напруження σ_0 деформація розвивається за експоненціальним законом, описуючи уповільнену пружну деформацію (затухаючу повзучість), яка асимптотично наближається до кінцевого значення $\varepsilon_{max} = \sigma_0/E$ [2]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}).$$

Ця модель добре описує процес первинної консолідації, але не має миттєвої деформації та не може адекватно моделювати релаксацію напружень, що є її суттєвим недоліком.

Модель Бюргерса є комбінацією моделей Максвелла та Кельвіна – Фойгта, з'єднаних послідовно (рис. 3) [20]. Така чотириелементна модель здатна описувати як миттєву пружну деформацію, так і первинну (затухаючу) та вторинну (усталену) повзучість.

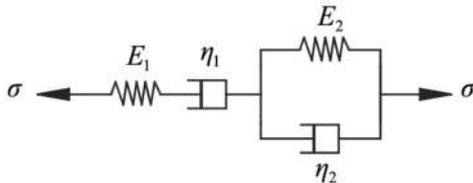


Рисунок 3 – Модель Бюргерса [20]

Закон повзучості для моделі Бюргерса при сталому напруженні σ_0 має вигляд [12]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_M} + \frac{\sigma_0}{E_K} (1 - e^{-\frac{E}{\eta} t}) + \frac{\sigma_0}{\eta_M} t,$$

де індекси M і K позначають параметри елементів Максвелла і Кельвіна-Фойгта відповідно. Ця модель широко використовується для опису поведінки глинистих ґрунтів при довготривалому навантаженні, оскільки вона здатна відтворити всі основні стадії деформування.

Модель Бюргерса з пластичністю. Для врахування необоротних деформацій модель Бюргерса розширюється додаванням пластичного елемента (повзун Сен – Венана – Кулона). Повна деформація тепер складається з трьох компонентів [2]:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v + \varepsilon_p = \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{ep}.$$

Пружно-в'язка частина ($\varepsilon_e + \varepsilon_v$): ця частина описується диференціальним рівнянням моделі Бюргерса, яке пов'язує напруження та їх похідні з деформаціями та їх похідними.

Пластична частина (ε_p): ця компонента активується лише тоді, коли напружений стан σ досягає або перевищує поверхню текучості, що визначається критерієм міцності, наприклад, Мора – Кулона або Друкера – Прагера. Швидкість пластичної деформації визначається класичною теорією пластичної течії [2]:

$$\dot{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma},$$

де λ – невід'ємний скалярний пластичний множник. $\lambda > 0$ лише при активному пластичному навантаженні, в іншому випадку $\lambda = 0$; $g(\sigma)$ – функція пластичного потенціалу, яка визначає напрям вектора пластичної течії.

Якщо $g \equiv f$ (де f – функція текучості), закон течії називається асоційованим. Ця модель дозволяє комплексно аналізувати як довготривалі деформації, так і граничні стани ґрунтової основи.

Модель Перовича – Соловйова (з урахуванням пластичності) базується на принципі спадковості Больцмана, згідно з яким поточна деформація залежить від усієї історії навантаження. Це найбільш загальний підхід до опису в'язкопружної поведінки.

Загальне рівняння деформації [2]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t) + \varepsilon_p(t),$$

де $(\varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t))$ – пружно-в'язка частина, яка описується інтегральним рівнянням Вольтерри. Для одновісного випадку загальна деформація $\varepsilon(t)$ при змінному напруженні $\sigma(t)$ визначається як [2]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

де σ_0/E_0 – миттєва пружна деформація (E_0 – модуль миттєвої пружності). Спадкова (в'язкопружна) деформація визначається за формулою:

$$\int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau,$$

що накопичилася з початкового моменту часу до поточного. $K(t-\tau)$ – ядро повзучості, функція, що описує "затухання пам'яті" матеріалу. Чим більша різниця $(t-\tau)$, тим менший вплив напруження $\sigma(\tau)$ на поточну деформацію.

Пластична компонента $\varepsilon_p(t)$ активується, коли напружений стан досягає поверхні текучості.

Особливістю моделі, як зазначено, є можливість врахування часозалежної поверхні текучості, що дозволяє моделювати ефекти старіння або деградації міцності ґрунту [2]:

$$f(\sigma, q, t) = F(\sigma, q) - k(t) \leq 0,$$

де $F(\sigma, q)$ – класична функція текучості (напр., Мора – Кулона або Друкера – Прагера); $k(t)$ – поріг текучості, що змінюється з часом.

Модель може включати часозалежну поверхню текучості, що дозволяє моделювати ефекти старіння або деградації міцності ґрунту. Через математичну складність та труднощі з визначенням параметрів, її застосування в інженерній практиці обмежене.

Модель Перзини представляє собою уніфікований підхід до в'язкопластичності на основі концепції "перенапруження" (overstress). В'язкопластичні деформації розвиваються, коли напружений стан виходить за межі статичної поверхні текучості $F=f(\sigma, q) - k > 0$. Швидкість в'язкопластичної деформації визначається як [6]:

$$\varepsilon_{ij}^{vp} = \gamma \cdot \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}},$$

де γ – скалярний параметр плинності або в'язкості матеріалу, $\langle \cdot \rangle$ – оператор Макколі, який визначається як $\langle x \rangle = x$ при $x > 0$, і $\langle x \rangle = 0$ при $x \leq 0$, $\Phi(F)$ – функція, що визначає закон течії (часто степенева):

$$\Phi(F) = \left(\frac{F}{F_0} \right)^N,$$

де F – поточне значення функції текучості; F_0 – референсне значення для нормування; N – показник чутливості до швидкості деформування (типові значення 1-10)

Модель описує залежність міцності від швидкості деформування і добре працює в чисельних алгоритмах МСЕ.

Модель Адачі-Ока спеціально розроблена для нормально консолидованих глин з урахуванням їх специфічних властивостей. Вона базується на концепції критичного стану та враховує залежність міцності від швидкості деформування [11].

Варіант МСС-еліпс (поширений у реалізаціях Адачі – Ока) [11]:

$$f(p', q, p'_c) = q^2 - M^2 p'(p'_c - p') \leq 0,$$

де M – нахил лінії критичного стану; p'_c – тиск переущільнення, що змінює зміцнення.

Швидкість в'язкопластичної деформації визначається рівнянням, що має структуру, подібну до моделі Пержини. Однак, на відміну від загальної степеневої функції, в моделі Адачі – Ока функція перенапруження часто має експоненційну форму, що пов'язує швидкість деформації зі "відстанню" від поточного напруженого стану до деякого референтного стану на поверхні текучості [11]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = C \exp \left[m' \left(\frac{\eta}{\eta^*} + \ln \frac{p'}{p'_0} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}},$$

де C та m' – параметри в'язкопластичності, що визначаються експериментально; m' – характеризує чутливість до швидкості деформування; $\eta = q/p'$ – поточне відношення напружень; η^* – відношення напружень, що відповідає референтному стану (часто приймається рівним M); p'_0 – референтний тиск.

Модель Адачі – Ока є однією з піонерських уніфікованих в'язкопластичних моделей, що успішно поєднала теорію критичного стану з описом часозалежних ефектів. Вона заклала теоретичне підґрунтя для багатьох сучасних, більш досконалих та практично орієнтованих моделей, таких як Soft Soil Creep.

Модель Modified Cam-Clay (MCC) з реологією/Soft Soil Creep (SSC). Ця модель представляє собою розширення класичної моделі Modified Cam-Clay для врахування залежних від часу ефектів. Вона зберігає всі переваги теорії критичного стану, додаючи можливість моделювання вторинної консолідації.

Закон повзучості та зміцнення (Creep and Hardening Law). Це ядро моделі. Модель SSC перетворює відомий емпіричний логарифмічний закон повзучості в диференціальну форму. Швидкість об'ємної в'язкопластичної (повзучості) деформації визначається як [9]:

$$\dot{\varepsilon}_v^{vp} = \frac{\mu^*}{\tau(1+e_0)} \left(\frac{p'_{eq}}{p'_c} \right)^{\lambda^* - k^*} \mu^*,$$

де μ^* – модифікований індекс повзучості; λ^* – модифікований індекс стиснення; k^* – модифікований індекс набухання, що характеризує пружну стисливість; τ – референтний час, що використовується для нормалізації (зазвичай 1 доба; p'_{eq} – еквівалентний тиск, що є мірою поточного напруженого стану на еліптичній поверхні; p'_c – тиск переущільнення, що є змінною зміцнення. Ці модифіковані індекси пов'язані з класичними індексами, що визначаються з компресійних випробувань (C_c, C_r, C_a) [1; 9]:

$$\lambda^* = \frac{C_c}{2.3(1+e_0)}; \quad k^* = \frac{C_r}{2.3(1+e_0)}; \quad \mu^* = \frac{C_a}{2.3(1+e_0)}.$$

Модель Modified Cam-Clay з реологією (Soft Soil Creep) забезпечує найбільш реалістичний прогноз довготривалої поведінки слабких зв'язних ґрунтів, що робить її незамінною для проектування відповідальних споруд у складних інженерно-геологічних умовах. Однак як і класична модель MCC, модель SSC не призначена для моделювання щільних пісків та сильно переущільнених глин, де домінують інші механізми деформування.

Завдяки аналізу цих моделей вдалося структурувати їхні основні розбіжності, які стосуються як математичного формулювання, так і фізичної природи деформаційних явищ. Узагальнене порівняння цих характеристик наведено в табл. 2.

Інтеграція моделей у програмні комплекси

Існують чисельні методики та програмні комплекси (напр., Plaxis, Midas GTS NX, Abaqus, ANSYS та ін.), що дозволяють моделювати взаємодію конструкцій з пружнопластичними основами. Врахування реологічних властивостей також реалізовано в багатьох з них, переважно на основі лінійних або простих нелінійних моделей повзучості [2; 6] та теорії консолідації [4; 5]. Проте:

1. Вибір моделі все одно лишається на відповідальності інженера-дослідника. Слід правильно налаштувати параметри, умови зміцнення, релаксаційні параметри тощо [1; 7; 10].

2. Універсальні (загальні) моделі, як-от Hardening Soil з повзучістю [9], Creep-SCLAY1, Soft Soil Creep [9; 11], вимагають великого обсягу вхідних даних для коректного результату.

Таблиця 2 – Порівняльний аналіз реологічних моделей ґрунту

Модель	Ключова концепція	Основний тип ґрунтів	Головні переваги	Ключові обмеження та виклики калібрування
Бюргерса з пластичністю	Феноменологічна, комбінація елементів	Загального призначення (для якісного аналізу)	Концептуальна простота, поєднує повзучість та пластичність.	Лінійна в'язкопружна частина; не враховує залежність жорсткості від напружень.
Пержини (EVP)	Теорія надлишкових напружень (Overstress)	Загального призначення, особливо для динаміки	Уніфікований опис в'язкопластичності, моделює залежність міцності від швидкості деформації.	Складність визначення функції течії $\Phi(F)$ та параметра плинності γ .
Адачі-Ока	Теорія критичного стану + Overstress	Нормально ущільнені глини	Теоретично обґрунтована, поєднує реологію з фундаментальною механікою ґрунтів.	Теоретична складність, рідко реалізована в комерційному ПЗ.
МСС з реологією (Soft Soil Creep)	Теорія критичного стану + емпіричний закон повзучості	Слабкі зв'язні ґрунти (глини, мули, торф)	Параметри (λ^* , κ^* , μ^*) мають чіткий фізичний зміст і визначаються зі стандартних тестів; висока точність для слабких ґрунтів.	Непридатна для щільних пісків та сильно переущільнених глин.
Перовича-Соловійова	Теорія спадковості (інтегральна)	Загального призначення (для досліджень)	Математично найбільш строгий опис матеріалу з "пам'яттю".	Надзвичайна складність експериментального визначення ядра повзучості $K(t-\tau)$.

3. Іноді доводиться приблизно вводити «додаткові» складові (наприклад, в'язкопластичність) через програмні скрипти або користувацькі підпрограми, якщо штатних опцій бракує. Така інтеграція вимагає верифікації: спочатку обчислюють тестові приклади, порівнюють результати з аналітичними розв'язками або експериментальними даними.

Лише після підтвердження адекватності переходять до моделювання реальних складних об'єктів. Огляд програмного забезпечення наведено в табл. 3.

Проблема калібрування та новітні data-driven підходи

Найскладніша проблема – калібрування моделі, тобто визначення числових значень усіх потрібних параметрів [1; 7]. Процедура передбачає:

1. Лабораторні тести – дають базову інформацію про пружні модулі, міцність, повзучість тощо [2; 11; 12].

2. Польові штампові випробування з реєстрацією осідань у часі – дозволяють отримати «натурні» криві, які порівнюють із результатами розрахунків [3; 4].

3. Зворотний аналіз (inverse analysis) – коли відомі осідання чи напруження в натурних умовах, і ці дані використовують для уточнення параметрів $\{E, c, \phi, \eta, \dots\}$ [7; 10].

4. Критерії збіжності: різниця між розрахунковими й експериментальними кривими $\Delta \leq \epsilon$ (зазвичай $\epsilon = 5-15\%$ залежно від вимог точності). Якщо дані натурних чи лабораторних експериментів виявляються суперечливими, дослідник може застосовувати статистичні або імовірнісні методи (наприклад, метод Монте – Карло, латинського гіперкуба), щоб дослідити чутливість результатів до змін параметрів.

У реальних умовах часто доводиться укрупнювати модель, відкидаючи менш впливові фактори, аби спростити калібрування і використати обмежену експериментальну базу [9; 15].

Цю проблему може вирішити новітній напрямок – використання методів машинного навчання (ML) для ідентифікації параметрів ґрунту [13]. Сучасні дослідження демонструють успішне застосування таких алгоритмів, як XGBoost, Random Forest та нейронні мережі, для прогнозування параметрів за даними польових випробувань, наприклад, статичного зондування (CPT) [13]. Перспективним напрямком є розробка фізично-інформованих нейронних мереж (Physics-Informed Neural Networks, PINNs), які інтегрують фундаментальні фізичні закони (наприклад, конститутивні рівняння) безпосередньо в архітектуру мережі [13]. Це дозволяє поєднати гнучкість data-driven підходів з надійністю фізично обґрунтованого моделювання.

Таблиця 3 – Огляд програмного забезпечення для реологічного аналізу

ПЗ	Метод	Типові реалізовані реологічні моделі	Аналіз повзучості та консолідації	Типові задачі та сильні сторони
PLAXIS 2D/3D	MCE (FEM)	Mohr-Coulomb, Hardening Soil, Soft Soil Creep, Modified Cam-Clay, Hoek-Brown, UDSM (напр., NorSand, PM4Sand) [15]	Повністю зв'язаний аналіз консолідації (flow-deformation coupling) [15].	Обмежена гнучкість для нестандартних моделей порівняно з універсальними пакетами.
Abaqus	MCE (FEM)	Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Cam-Clay, Cap Plasticity. Широка можливість для користувацьких моделей (UMAT) [17].	Зв'язаний аналіз напружень та порового тиску для консолідації. Загальні моделі повзучості [17].	Потужний для складних нелінійних задач, динаміки, взаємодії з іншими фізичними полями (термомеханіка) [17].
ANSYS Mechanical	MCE (FEM)	Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Cam-Clay, Jointed Rock. Користувацькі моделі через APDL [19].	Зв'язані поля для аналізу консолідації. Загальні моделі повзучості для аналізу в'язкої поведінки [19].	Багатоцільовий MCE-пакет. Потужний для мультифізичних задач (термо-гідро-механічних) [19].
Midas GTS NX	MCE (FEM)	Mohr-Coulomb, Modified Cam-Clay, Soft Soil Creep, Hoek-Brown, Hardening Soil (HS), Duncan-Chang, Jardine [16].	Підтримує аналіз консолідації, зв'язаний аналіз "напруження-фільтрація" (stress-seepage), стабільність будівництва [16].	Комплексне геотехнічне ПЗ. Сильні сторони: моделювання тунелів, глибоких котлованів, фундаментів, аналіз стійкості схилів та динамічний аналіз [16].
FLAC3D	МКР (FDM)	Mohr-Coulomb, Strain-Softening (SSoft), Modified Cam-Clay, Hoek-Brown. Велика бібліотека моделей повзучості (Burgers, Soft-Soil-Creep) [18].	Явна інтеграція за часом. Широкий набір вбудованих моделей повзучості. Можливість моделювання повністю зв'язаної фільтрації [18].	Сильний в аналізі великих деформацій та задач стійкості. Добре підходить для динамічних та нестійких процесів [18].

Висновки

Проведений огляд теорії та методів розрахунку підтверджує, що точний прогноз параметрів НДС споруд, які взаємодіють із пружнопластичною основою, неможливий без урахування їхніх реологічних властивостей. Еволюція від простих лінійних моделей до уніфікованих теорій в'язкопластичності демонструє тенденцію до підвищення фізичної реалістичності та прогностичної здатності чисельних розрахунків.

Окремо слід підкреслити, що для забезпечення достовірності результатів необхідна порівняльна верифікація: одна й та сама ґрунтова модель (Soft Soil Creep, модифікована Cam-Clay із повзучістю тощо) має бути реалізована в кількох програмних

комплексах (PLAXIS, Midas GTS NX, FLAC3D) з подальшим зіставленням осідань, перерозподілу напружень і параметрів консолідації з аналітичними розв'язками або даними лабораторних та польових випробувань. Такий багатоканальний підхід дає змогу виявити чутливість моделі до чисельної схеми, граничних умов і параметрів та забезпечити обґрунтований вибір її застосування.

Подальші дослідження варто спрямувати на уніфікацію підходів до перевірки моделей у різних середовищах МСЕ/МКР, створення еталонних тестових задач для ґрунтів із тривалою деформацією та розширення експериментальної бази, що забезпечить не лише теоретичну цілісність реологічних моделей, а й їхню інженерну придатність.

Список літератури

1. Wood D. M. Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics. Cambridge : Cambridge University Press, 1990. 488 p.
2. Vyalov S. S. Rheological fundamentals of soil mechanics. Amsterdam : Elsevier, 1986. 564 p.
3. Bjerrum L. Problems of Soil Mechanics and Construction on Soft Clays. *Géotechnique*. 1973. 23 (3). P. 319–358.
4. Terzaghi K., Peck R. B. Soil Mechanics in Engineering Practice. 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1967. 729 p.

5. Biot M. A. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*. 1941. 12 (2). P. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886.
6. Perzyna P. Fundamental Problems in Viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*. 1966. 9. P. 243–377.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 6th ed. Oxford : Elsevier, 2005. 752 p.
8. Oida A. Analysis of Rheological Deformation of Soil by Means of Finite Element Method. *Journal of Terramechanics*. 1984. 21 (3). P. 237–251.
9. Vermeer P. A., Neher H. P. A soft soil model that accounts for creep. *Beyond 2000 in Computational Geotechnics: Proceedings of the International Symposium (Amsterdam, The Netherlands, 18–20 March 1999)*. Rotterdam : A. A. Balkema, 1999. P. 249–261.
10. Затилюк Г. А. Чисельне моделювання взаємодії будівельних конструкцій із пружнопластичною основою напіваналітичним методом скінченних елементів : дис. ... канд. техн. наук : 131. Київ, 2021. 200 с.
11. Adachi T., Oka F. Constitutive Equations for Normally Consolidated Clay Based on Elasto-Viscoplasticity. *Soils and Foundations*. 1982. 22 (4). P. 57–70.
12. Reiner M. Deformation and Flow: An Elementary Introduction to Rheology. London : H. K. Lewis, 1963. 347 p.
13. Marzouk H., Felic H., Tschuchnigg F. A data-driven approach for soil parameter determination using supervised machine learning. *Proceedings of the 9th International Symposium on Geotechnical Safety and Risk (ISGSR) (Oslo, Norway, 2024)*. Singapore : Research Publishing, 2024. P. 729–733.
14. Budhu M. Soil Mechanics and Foundations. 3rd ed. New York : John Wiley & Sons, 2011. 784 p.
15. Bentley Systems. PLAXIS 2D Material Models Manual. Exton, PA : Bentley Systems, Incorporated, 2023.
16. MIDAS IT. GTS NX Analysis Reference Manual. Seongnam-si : MIDAS Information Technology Co., Ltd., 2023.
17. Dassault Systèmes. Abaqus Analysis User's Manual. Vélizy-Villacoublay : Dassault Systèmes Simulia Corp, 2022.
18. Itasca Consulting Group, Inc. FLAC3D 7.0 Manuals. Minneapolis, MN : Itasca International Inc., 2020.
19. ANSYS, Inc. ANSYS Mechanical APDL Basic Analysis Guide. Canonsburg, PA : ANSYS, Inc., 2023.
20. Шеремета Р. Огляд реологічних моделей. *Вісник Львівського національного аграрного університету. Серія: Агроінженерні дослідження*. 2018. 22. С. 22–30. DOI: 10.31734/agroengineering2018.01.022.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.2025

Zatyliuk Gherman

Associate Professor of the Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0000-0003-0392-2214>
 Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

Bartkiv Bohdan

Postgraduate student of the Department of Structural Mechanics,
<https://orcid.org/0009-0000-0174-5889>
 Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv

REVIEW OF THEORY AND METHODS FOR MODELING ELASTOPLASTIC FOUNDATIONS CONSIDERING THEIR RHEOLOGICAL PROPERTIES

Abstract. A systematic review of modern theoretical approaches and numerical methods for modeling the interaction of structures with elastoplastic soil foundations, accounting for their rheological properties, has been conducted. The evolution of scientific concepts is traced, from classical simplified models (Winkler foundation model, linear-elastic half-space) to modern generalized viscoplastic formulations. The main classes of rheological soil models (consolidation, linear and nonlinear creep, unified viscoplastic theories) and their application areas are analyzed. Furthermore, numerical modeling methods for foundations are systematized, with particular emphasis on the finite element method and its modifications. A comparative analysis of the ten most common rheological models used in modern geomechanics is presented, assessing their capabilities and limitations. The review revealed that an accurate prediction of the "structure–foundation" stress-strain state is impossible without considering rheological phenomena (creep, consolidation), especially for heavily loaded or soft soils. It is shown that the gradual refinement of models – from elastic to viscoplastic – increases the consistency of calculations with the actual behavior of foundations; however, this is accompanied by an increase in the number of parameters and the complexity of their experimental determination. It was established that existing "unified" models require labor-intensive calibration, which limits their practical application. Current challenges include the insufficient adaptability of models for non-standard soils (organic, filled, frozen), the need to account for anisotropy and cyclic effects, and the improvement of long-term forecast accuracy. Promising directions for improvement include the development of multi-scale approaches that combine soil micro- and macromechanics, and the integration of machine learning methods to automate model parameter selection. The implementation of such solutions will enhance calculation reliability and economic efficiency in complex geotechnical conditions.

Keywords: soil rheology; elastoplasticity; viscoelasticity; creep; consolidation; constitutive models

References

1. Wood, D. M. (1990). *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press.
2. Vyalov, S. S. (1986). *Rheological fundamentals of soil mechanics*. Elsevier.
3. Bjerrum, L. (1973). Problems of soil mechanics and construction on soft clays. *Géotechnique*, 23 (3), 319–358.
4. Terzaghi, K., & Peck, R. B. (1967). *Soil mechanics in engineering practice* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
5. Biot, M. A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12(2), 155–164. <https://doi.org/10.1063/1.1712886>
6. Perzyna, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. *Advances in Applied Mechanics*, 9, 243–377.
7. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The finite element method: Its basis and fundamentals* (6th ed.). Elsevier.
8. Oida, A. (1984). Analysis of rheological deformation of soil by means of finite element method. *Journal of Terramechanics*, 21 (3), 237–251.
9. Vermeer, P. A., & Neher, H. P. (1999). A soft soil model that accounts for creep. In *Beyond 2000 in Computational Geotechnics: Proceedings of the International Symposium (Amsterdam, The Netherlands, 18–20 March 1999)* (pp. 249–261). A. A. Balkema.
10. Zatyliuk, G. A. (2021). *Chyselne modeliuвання vzaiemodii budivelnykh konstruksii iz pruzhnoplastychnoiu osnovoiu napivanalitichnym metodom skinchennykh elementiv* [Numerical modeling of the interaction of building structures with an elastoplastic foundation by the semi-analytical finite element method] (Doctoral dissertation). Kyiv National University of Construction and Architecture.
11. Adachi, T., & Oka, F. (1982). Constitutive equations for normally consolidated clay based on elasto-viscoplasticity. *Soils and Foundations*, 22 (4), 57–70.
12. Reiner, M. (1963). *Deformation and flow: An elementary introduction to rheology*. H. K. Lewis.
13. Marzouk, H., Felic, H., & Tschuchnigg, F. (2024). A data-driven approach for soil parameter determination using supervised machine learning. In *Proceedings of the 9th International Symposium on Geotechnical Safety and Risk (ISGSR) (Oslo, Norway, 2024)* (pp. 729–733). Research Publishing.
14. Budhu, M. (2011). *Soil mechanics and foundations* (3rd ed.). John Wiley & Sons.
15. Bentley Systems. (2023). *PLAXIS 2D material models manual*.
16. MIDAS IT. (2023). *GTS NX analysis reference manual*. MIDAS Information Technology Co., Ltd.
17. Dassault Systèmes. (2022). *Abaqus analysis user's manual*. Dassault Systèmes Simulia Corp.
18. Itasca Consulting Group, Inc. (2020). *FLAC3D 7.0 manuals*. Itasca International Inc.
19. ANSYS, Inc. (2023). *ANSYS mechanical APDL basic analysis guide*.
20. Sheremeta, R. (2018). Ohliad reolohichnykh modelei [Review of rheological models]. *Visnyk of Lviv National Agricultural University. Series: Agroengineering Research*, 22, 22–30. <https://doi.org/10.31734/agroengineering2018.01.022>

Посилання на публікацію

- APA Zatyliuk, G., & Bartkiv, B. (2025). Review of theory and methods for modeling elastoplastic foundations considering their rheological properties. *Management of Development of Complex Systems*, 64, 231–240. [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.64.231-240](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.64.231-240).
- ДСТУ Затылюк Г. А., Бартків Б. Я. Огляд теорії і методів моделювання пружнопластичних основ з врахуванням їх реологічних властивостей. *Управління розвитком складних систем*. Київ, 2025. № 64. С. 231 – 240. [dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2025.64.231-240](https://doi.org/10.32347/2412-9933.2025.64.231-240).